

Quelques exemples d'analyses  
théoriques en Compatibilité  
Électromagnétique  
avec l'analyse tensorielle des  
réseaux

Olivier MAURICE

## TABLE DES MATIÈRES

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 1.    | Préface de Frédéric LAFON                            | 6   |
| 2.    | Introduction   | 9   |
| 3.    | Lignes en $\pi$ courtes                              | 15  |
| 4.    | Lignes en T courtes                                  | 22  |
| 5.    | Lignes courtes en $\pi$ couplées                     | 25  |
| 6.    | Ligne blindée  | 31  |
| 7.    | Lignes bifilaires blindées                           | 33  |
| 8.    | Couplage de deux lignes blindées                     | 36  |
| 9.    | Couplage de deux lignes bifilaires blindées          | 39  |
| 10.   | Toron court, lignes non blindées                     | 40  |
| 11.   | Torons courts, lignes blindées ou non blindées       | 54  |
| 11.1. | Détermination de la marge                            | 58  |
| 12.   | Toron court blindé                                   | 65  |
| 13.   | ligne torsadée                                       | 68  |
| 14.   | Ligne courte illuminée par un champ                  | 69  |
| 14.1. | Illustration   | 73  |
| 15.   | Modélisation de l'essai d'injection de courant       | 75  |
| 16.   | Cavités de petits volumes - cavité <i>courte</i>     | 78  |
| 17.   | Liaison dans la cavité courte fermée                 | 81  |
| 18.   | Cavité courte avec joint                             | 83  |
| 19.   | cavité courte avec ouverture                         | 87  |
| 20.   | Bâtiment court en béton armé                         | 89  |
| 20.1. | Insertion d'une ligne dans le bâtiment en béton armé | 93  |
| 21.   | Cavité courte alimentée en courant                   | 96  |
| 22.   | Opérateur d'impédance défini sur des domaines        | 103 |
| 23.   | Transformée inverse de Laplace                       | 106 |
| 23.1. | Conditions initiales en tension à reporter           | 107 |
| 23.2. | Conditions initiales en courant à reporter           | 107 |
| 23.3. | Valeur en continu                                    | 108 |

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 23.4. | Modélisation générale d'une non linéarité  | 112 |
| 24.   | Onde guidée - schéma de Branin   | 114 |
| 25.   | Propagation dans une ligne longue sans pertes  | 117 |
| 26.   | Lignes longues sans pertes couplées  | 125 |
| 26.1. | Couplage par les charges   | 125 |
| 26.2. | Couplage par mutuelle inductance   | 127 |
| 26.3. | tendance asymptotique basses fréquences  | 129 |
| 27.   | Torons longs et lignes blindées longues  | 133 |
| 27.1. | Ligne bifilaire blindée  | 137 |
| 27.2. | Processus récurrent dans l'analyse de<br>l'architecture câblage                        | 138 |
| 28.   | Cavités résonantes   | 141 |
| 28.1. | Composantes basses fréquences $E_{\eta 0}$ , $H_{u0}$                                  | 145 |
| 28.2. | Points faibles de la représentation en résonateurs,<br>modèle de Branin pour la cavité | 146 |
| 28.3. | Couplage avec des pistes du PCB  | 151 |
| 28.4. | Remarque sur l'effet pelliculaire et l'impédance<br>de surfaces métalliques            | 160 |
| 29.   | Cavité longue avec ouverture   | 163 |
| 29.1. | Couplage mode vers ouverture   | 163 |
| 29.2. | Essais en immunité rayonnée sur équipement   | 165 |
| 30.   | CEM des composants passifs ou actifs   | 172 |
| 31.   | Modèle ICEM  | 175 |
| 32.   | Filtres  | 177 |
| 32.1. | Filtre passe-bas, structure L-C-L  | 177 |
| 32.2. | Filtre passe-bande   | 179 |
| 32.3. | Conception sous défaut de connaissance   | 180 |
| 32.4. | Filtres d'ordres élevés  | 182 |
| 33.   | Écrêteurs  | 184 |
| 34.   | Électronique analogique  | 186 |
| 34.1. | Amplificateur opérationnel (AOP)   | 186 |
| 34.2. | Montages à transistors   | 194 |

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 35.   | Espace des jonctions ou paires de nœuds  | 206 |
| 35.1. | Modèles équivalents large bande des transistors  | 211 |
| 35.2. | Comportement du transistor sous irradiation  | 220 |
| 36.   | Modèle de transistor basé "diode"  | 222 |
| 36.1. | Amplificateur  | 222 |
| 37.   | Électronique numérique : ADC & DAC   | 231 |
| 37.1. | Perturbation électromagnétique de l'ADC  | 233 |
| 37.2. | Convertisseur de signal digital vers un signal<br>analogique (DAC : digital analogic<br>converter) | 235 |
| 38.   | Électronique numérique : portes logiques   | 237 |
| 38.1. | CEM des portes logiques  | 243 |
| 38.2. | Modélisation générale des portes logiques en<br>CEM vis à vis d'agressions diverses                | 247 |
| 39.   | Électronique numérique : circuits numériques   | 249 |
| 39.1. | Machine informatique   | 249 |
| 40.   | Théorie de la perturbation de l'information  | 256 |
| 40.1. | Entropie   | 256 |
| 40.2. | Impact de la perturbation des mots $m(D)$  | 258 |
| 41.   | Analyse préalable aux applications numériques<br>maillées  | 266 |
| 41.1. | Autres erreurs liées à la numérisation   | 269 |
| 41.2. | Méthodologie   | 271 |
| 42.   | Gestion d'un partage des simulations   | 273 |
| 42.1. | Échelle  | 273 |
| 42.2. | Description du système   | 274 |
| 42.3. | Frontières   | 274 |
| 42.4. | Analyse du système par découpage   | 275 |
| 42.5. | Diakoptic généralisée  | 277 |
| 42.6. | Application à la gestion en CEM du système<br>pour une architecture $\Theta_x$ , puis globale      | 278 |
| 43.   | Modélisation matricielle des ondes   | 280 |

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 44.   | Analyse de sensibilité   | 282 |
| 44.1. | Analyse par dérivée partielle covariante ou dans<br>l'espace tangent | 282 |
| 44.2. | Dérivation partielle contravariante dans l'espace<br>curviligne      | 283 |
| 45.   | Intégration de l'automatique   | 285 |
| 46.   | Quelques relations utiles  | 288 |
| 46.1. | Inductances  | 288 |
| 46.2. | Lignes   | 288 |
| 46.3. | Sections de fils   | 289 |
| 46.4. | Dipôle   | 289 |
| 46.5. | Transformées de Laplace  | 290 |

## 1. PRÉFACE DE FRÉDÉRIC LAFON

Cela va faire maintenant environ 20 ans que j'ai le plaisir de côtoyer Olivier Maurice et d'avoir pu le voir au fil de ces années développer la méthode MKME (Modified Kron's Method for EMC). Il aura cherché à affiner à la fois sa manière de traiter et d'appliquer la méthode elle-même... mais aussi et surtout la manière de l'expliquer et de la transmettre aux autres. Cet ouvrage est à mon sens un aboutissement pour ce deuxième aspect, où Olivier aura opté pour l'apprentissage par l'exemple. Au travers une capitalisation remarquable de retour d'expériences et d'études pratiques de problèmes de CEM traités avec la méthode MKME, chacun (qu'il soit jeune Ingénieur ou Expert, et je reviendrai sur cela ultérieurement !) saura y trouver un lien avec ses problématiques rencontrées au quotidien. Aborder une analyse CEM au niveau système est par définition ou par nature complexe. Mais comme dans tout système, une décomposition de la problématique est possible et le système peut alors être vu et étudié comme une association de problématiques plus simples. Reprendre un des fondamentaux de la CEM, qui vise à décomposer en trois étapes clés le mécanisme d'émission ou d'immunité (Source – Couplage – victime), est en quelques sortes ce qui est proposé dans cet ouvrage : Décomposer et traiter étape par étape chacun des aspects qui pourront ensuite être combinés ensemble pour se rapprocher du système. De manière élémentaire, Oliver Maurice aborde les mécanismes de couplage des perturbations (champ à fil au niveau câblage ou champ à piste à l'échelle du PCB) de propagations des perturbations (diaphonie, avec ou sans blindage...), l'étude des cavités (leurs résonances et propagation par les ouvertures), Les sources de perturbations avec des rappels sur les méthodes de modélisation des circuits intégrés (immunité,

émissions, auto-compatibilité), les filtrages... Une collection impressionnante de cas d'applications qui permettra à chacun de pouvoir prendre en main la méthode de Kron au travers des problématiques qui lui sont proches, tout en rappelant aux lecteurs les équations de base permettant de traiter théoriquement ces différents points. Cet ouvrage est à mon sens tout à fait destiné à la fois à de jeunes Ingénieurs qui souhaitent découvrir et s'approprier des méthodes d'analyse théorique et en particulier la méthode MKME, mais également à des Ingénieurs et experts plus expérimentés qui pourront aussi y retrouver leurs propres expériences abordées de manière peut être différentes. L'un comme l'autre pourront alors s'approprier cette méthode qui m'apparaît personnellement comme de plus en plus puissante et intéressante à chaque cas d'application que nous pouvons voir traiter avec... Et cela même dans un cadre industriel, contrairement (et à tort), à ce que certains pourraient penser. Le rêve de tout ingénieur en milieu industriel est de limiter les analyses et résolutions de problèmes tardifs sur les projets et d'anticiper ces problèmes grâce à des interactions fortes dès les premières étapes de conception. La théorie et la pratique sont totalement indissociables pour arriver à cet objectif et je suis convaincu de l'apport de la méthode MKME pour supporter efficacement cette démarche, en offrant des capacités d'analyse que des simulations 3D ou autres ne permettent pas au même niveau. Pour terminer cette Préface en illustrant mon propos précédent, je souhaite partager l'expérience très positive que nous avons pu avoir dans le cadre de la thèse de Marine Stojanovic sur la conception des filtres en prenant en compte les couplages inter-composants. Aujourd'hui grâce au développement analytique du calcul de ces couplages et leur exploitation avec la méthode MKME nous sommes capables de calculer efficacement la réponse d'un filtre quelque soit sa topologie et sa

structure. Ces calculs sont instantanés et offrent une capacité d'analyse qui est à mon sens fondamental pour comprendre et interagir sur la conception (identifier rapidement par modification des matrices de couplages lesquels sont prépondérants par exemple)... 3 ans en arrière, le traitement de ce genre de problème nécessitait des heures voir des jours de calcul avec n'importe quel simulateur 3D, et avec des résultats n'offrant que difficilement ces mêmes capacités d'analyse. J'invite donc le lecteur à pratiquer... je suis persuadé qu'après quelques efforts il sera à son tour totalement convaincu de l'intérêt et des apports de la méthode MKME.

Frédéric Lafon, EMC Master Expert - VALEO.



## 2. INTRODUCTION

Cet ouvrage est un recueil d'exercices théoriques de compatibilité électromagnétique précédemment testés à diverses occasions et pouvant servir à l'ingénieur comme un recueil de cas types qu'il pourra adapter à ses besoins, et justifier ainsi rigoureusement de la conception CEM du système dont il a la charge. L'objet de cette monographie n'est pas d'expliquer l'analyse tensorielle des réseaux (ATR) à la base de la méthode MKME : modified Kron's method for EMC. Les lecteurs intéressés pourront trouver dans d'autres ouvrages précédents toute la matière pour acquérir ce formalisme.

L'objectif espéré de ce recueil est de fournir un ensemble d'approches qui permettent d'aborder un système complet. Mais avant tout, la CEM y est abordée de façon théorique. Cela peut surprendre et certains pourront dire qu'un tel exercice ne sert à rien, que la CEM est un métier qui s'applique avant tout.

Théoriser ne signifie pas ne pas appliquer. Cela signifie que l'on ne réalise pas d'application numérique. Nous étudions les équations engendrées par telle étude sans nous soucier des valeurs numériques qu'elles donneraient dans tel cas particulier. Cet exercice est rarement mené en CEM, voire incompris. Pourtant c'est le préalable indispensable à toute application numérique ou usage d'outils avec maillage. Pourquoi ? Parce que la résolution locale des équations de Maxwell ne garantit pas la bonne modélisation globale. Le problème est systémique. La difficulté de la discrétisation de l'espace ou du temps est de démontrer que les schémas retenus convergent suffisamment vers l'expression analytique théorique. Certains pourront penser qu'il est parfois impossible d'établir les équations théoriques d'un problème. J'espère leur montrer dans cet ouvrage et dans

d'autres travaux que le formalisme de l'analyse tensorielle des réseaux permet d'établir les équations de problèmes complexes. Et il n'est pas forcément nécessaire de se poser la question d'une capacité de résolution spatiale par exemple. Nous pouvons étudier un système en partie exploitant des champs modaux sans connaître précisément les fréquences de ces modes. Et là, un outil numérique maîtrisé pourra permettre de faire une expérience virtuelle qui donnera ces fréquences avec suffisamment de précision. Mais nous aurons pu au préalable montrer que les schémas qu'il utilise sont à même de résoudre les types d'équations théoriques établies. Cela n'est ni trivial ni évident. Je citerai une anecdote. Lors de la mise au point d'une cavité, nous nous sommes aperçus qu'un signal avec un taux d'harmonique donné très bas injecté dans cette cavité ressortait avec des harmoniques 2 et 3 visibles, et d'amplitudes relativement peu inférieures à celle du fondamental. Beaucoup diraient qu'une simulation de ce problème avec un outil maillé résolvant les équations de Maxwell serait 'exacte'. Pourtant aucun outil ne ferait apparaître ces harmoniques. Elles provenaient de diodes involontairement fabriquées par des vissees d'un métal différent de celui du corps de la cavité.

Il est d'ailleurs assez paradoxal de considérer que la CEM est réduite à la résolution des équations de Maxwell, quand nous savons que ce qui est perturbé, ce sont des composants électroniques répondant aux équations des semiconducteurs et pas aux seules équations de Maxwell... Il faut rappeler ce qu'Einstein nous précise : *Les équations de Maxwell sont les équations du champ. Elles ne nous renseignent en rien sur la nature exacte et les trajectoires des courants.* Une conséquence d'ailleurs de cela est que plusieurs configurations de courants conduisent aux mêmes cartographies de champs. Souvent nous

utilisons l'hypothèse sans la formuler que les courants sont suffisamment contraints pour que nous puissions restreindre les solutions possibles à une seule. Ainsi basiquement un courant d'électrons ou de protons peut conduire au même champ lointain. Mais il a aussi été montré que des distributions choisies de dipôles émettaient le même champ qu'une circulation particulière.

Il me paraît plus indispensable que jamais d'exécuter l'étape préalable d'analyse théorique du système étudié pour ensuite mener sa résolution numérique avec la maîtrise qu'il convient. De plus, et ce n'est pas un des moindres détails de cette approche, les équations pourront être enrichies des fonctions d'incertitudes ou fonctions probabilistes liées de façon à conduire ensuite leurs gestions dans le contexte des applications numériques.

J'espère que cet ouvrage permettra à des ingénieurs en CEM de construire les systèmes d'équations théoriques des problèmes qu'ils doivent résoudre pour ensuite gérer au plus rigoureusement possible les calculs qui s'en suivent. Il est clair que la construction de ce problème passe en partie par les connaissances de l'ingénieur. Mais moins que nous pourrions le penser. Pourquoi ? Parce que l'analyse tensorielle des réseaux offre une méthodologie systématique qui ne demande pas de mémoire d'expert. Elle demande certes des connaissances scolaires solides en électromagnétisme. Mais peut-on être moins exigeant ? L'ingénieur doit juste refaire le parcours de construction du système qu'il étudie. Par exemple s'il adresse un boîtier d'équipement : comment ce boîtier est-il fabriqué ? A partir de 4 cloisons jointes : alors nous partons de 4 plans métalliques à modéliser reliés par des impédances associées aux contacts et serrages utilisés, etc. Les valeurs ne sont pas précisées à ce niveau du travail, nous associons par exemple aux contacts

une impédance complexe  $a + jb$  générale, voire non linéaire (le fait de l'identifier nous force à nous questionner sur sa nature). L'enquête nécessaire pour donner des valeurs à  $a$  et  $b$  viendra ensuite et d'ailleurs nous devrions écrire dès le départ  $a \pm \delta a + j(b \pm \delta b)$ . J'ai essayé de mettre l'accent sur ces variations à diverses occasions dans les cas présentés. J'ai essayé de faire en sorte que le niveau de difficulté des cas abordés aille croissant avec la lecture de l'ouvrage.

Une autre difficulté, assez pointue il est vrai, est que la seule connaissance de la géométrie mécanique du problème ne suffit pas à déterminer le maillage le plus adéquat. L'analyse théorique par l'ATR permet à ce niveau d'aller très loin dans l'analyse, mais l'exercice n'est pas trivial et réclame un investissement important sur cette méthode pour en maîtriser les aspects les plus avancés. Mais l'analyse tensorielle des réseaux et la seconde géométrisation<sup>1</sup> permettent de déterminer les distances électromagnétiques entre deux observables d'un système. Or ces distances sont sans rapport direct avec celles géométriques. Et il peut être indispensable de situer les points de variations rapides du champ pour y augmenter la densité du maillage. Comment faire cette détermination sans disposer du système d'équations qui modélise théoriquement le problème ?

Un autre point conceptuel concerne la granularité du problème. Le changement d'espace dans l'ATR est explicite : il résulte de connectivités (incidences, ...) appliquées à des éléments d'un niveau d'espace vers un autre niveau, dans la représentation en topologie cellulaire du graphe associé au problème physique modélisé. Le changement d'échelle peu ou prou revient à une intégration dans l'espace. Nous renvoyons vers un scalaire une fonction étendue, intégrée sur un intervalle à l'échelle de

---

1. MAURICE, Olivier. Elements of Theory for Electromagnetic Compatibility and Systems. Bookelis, Aix en Provence, 2017.

l'observation. Aux niveaux les plus bas, le passage de l'échelle sus-jacente à l'échelle d'intérêt est brutal : c'est un processus souvent quantique. C'est à dire qu'à un niveau d'énergie faible, la probabilité d'existence des éléments étudiés est inférieure à 1. Lorsque nous fabriquons un système aux échelles ordinaires, les objets et interactions qui composent le système sont déterministes du point de vue de leur existence. Nous créons une collection puis par assemblage, un système mais nous ne nous posons pas la question de savoir si l'un des éléments de la collection est disponible : c'est implicite.

La méthode préférable lorsque l'on peut l'utiliser, est d'établir les équations du problème par l'ATR, puis de justifier pour l'application numérique que, pour les observables choisies, le schéma numérique retenu et la discrétisation tant spatiale que temporelle ou harmonique utilisée converge bien au sens défini vers l'équation analytique préalablement établie. Ce n'est que sous cette condition où la simulation numérique est vue comme une expérience virtuelle, que les résultats énoncés seront robustes.

Des ingénieurs de par leur grande expérience seront capables d'appréhender les difficultés associées à une simulation et les limites de cette simulation. Pour ces personnes, l'ATR n'est pas une connaissance indispensable. Mais leur talent n'est pas donné à tout le monde, et j'espère ici fournir une démarche systématique qui pourra permettre aux moins expérimentés de se rattraper par le chemin de la théorisation mathématique.

Je terminerai cette conclusion en citant le commandant Kaufmann : *Face à une multitude de méthodes particulières permettant chacune la mise en équation d'un système physique spécifique représentable par des réseaux électriques équivalents, le calcul tensoriel permet une systématisation qui, non seulement a la propriété de s'appliquer à n'importe quel système quel que*

*soit sa complexité, mais offre également un examen méthodique des circuits, de les décomposer en éléments simples, de les superposer ou de les interconnecter. Finalement, l'analyse tensorielle se révèle être un moyen général de synthèse et d'analyse des réseaux.*

### 3. LIGNES EN $\pi$ COURTES

La notion de ligne courte signifie que le temps de montée du signal excitateur est long devant le temps d'aller-retour d'une onde dans la ligne. Sous cette hypothèse nous pouvons réduire la ligne à une cellule unique des télégraphistes.

Une ligne utilisée par un ingénieur est en premier un diamètre de conducteur apte à porter l'intensité du courant à véhiculer. Des abaques indiquent la correspondance entre le diamètre du fil de la ligne et la capacité de conduction à des températures données. Soit  $\phi$  ce diamètre, la résistance de ce fil en fonction de l'opérateur de Laplace  $p$  pour une longueur  $x$  est donnée par :

$$(1) \quad R(p) = \frac{x}{\sigma\pi\phi} \left( \frac{4}{\phi} + \sqrt{\frac{\pi p \mu \sigma}{j2\pi}} \right)$$

L'incertitude linéique sur le diamètre engendre une dispersion  $\delta R(p)$ . En multipliant en haut et en bas par  $\phi \pm \delta\phi$  nous obtenons :

$$(2) \quad R(p) = \frac{x}{\sigma\pi [\phi \pm \delta\phi]} \left( \frac{4}{[\phi \pm \delta\phi]} + \sqrt{\frac{\pi p \mu \sigma}{j2\pi}} \right)$$

$$(3) \quad R(p) = \frac{x [\phi \mp \delta\phi]}{\sigma\pi\phi^2} \left( \frac{4 [\phi \mp \delta\phi]}{\phi^2} + \sqrt{\frac{\pi p \mu \sigma}{j2\pi}} \right)$$

Finalement :

$$(4) \quad \delta R(p) = \mp \frac{x\delta\phi}{\sigma\pi\phi^2} \left( \sqrt{\frac{\pi p \mu \sigma}{j2\pi}} \mp \frac{4\delta\phi}{\phi^2} \right)$$

Nous sélectionnons les valeurs extrêmes :

(5)

$$\delta R(p) = \frac{x\delta\phi}{\sigma\pi\phi^2} \left( \sqrt{\frac{\pi p\mu\sigma}{j2\pi}} + \frac{4\delta\phi}{\phi^2} \right) \quad -\delta R(p) = -\frac{x\delta\phi}{\sigma\pi\phi^2} \left( \sqrt{\frac{\pi p\mu\sigma}{j2\pi}} + \frac{4\delta\phi}{\phi^2} \right)$$

et  $R = R(p) \pm \delta R(p)$ .

Le second critère de choix pour une ligne est son impédance caractéristique. Cette dernière peut être mal définie pour des lignes de type bifilaires à géométrie non fixée, mais l'épaisseur de diélectrique constante permet néanmoins de calculer une impédance caractéristique même dans ces cas, avec son incertitude. De nombreux documents existent donnant les formules pour calculer l'impédance caractéristique. Soit  $z_c$  cette impédance, nous avons les deux relations approximées suivantes :

(6)

$$L = \frac{z_c}{v} x \quad C = \frac{1}{v z_c} x$$

$v$  est la vitesse de propagation dans la ligne, second paramètre d'importance. L'inductance appartient à la maille de la cellule unique des télégraphistes représentant la ligne. Cette maille est donc d'impédance  $z_t = (L + L_{ep})p + \frac{1}{Cp} + 2R$ . Notons que les permittivité diélectrique et perméabilité magnétique peuvent aussi dépendre de  $p$ . L'inductance dépend d'ailleurs de  $p$  comme partie imaginaire de l'effet pelliculaire, traduisant la pénétration du champ magnétique dans le métal :

(7)

$$L_{ep} \approx \mu \frac{x}{\phi} \sqrt{\frac{j2\pi}{\pi(p + p_\epsilon)\mu\sigma}}$$

$p_\epsilon$  est une pulsation conduisant pour  $p = 0$  à une inductance donnée par l'épaisseur totale de métal :

$$L_{p=0} \approx \mu \frac{x}{2}$$



Si de plus le diélectrique présente une certaine conductivité, la permittivité s'écrit  $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$ . La partie imaginaire crée une conductance  $g$  d'impédance donnée par :

$$(8) \quad g \approx \epsilon'' \frac{\omega \pi \phi}{2h}$$

$h$  étant la distance entre fils. Finalement l'impédance de la maille est donnée par :

$$(9) \quad z_t = 2R + (L + 2L_{ep})p + \frac{1}{g + Cp}$$

Dans le modèle de ligne, le condensateur et sa conductance sont divisés en 2 éléments en série pour obtenir la structure en  $\pi$  modélisant la ligne. C point n'est pas si trivial. L'impédance associée au condensateur de la ligne est donnée par :

$$(10) \quad \frac{1}{Cp} = \frac{1}{p} \frac{x}{\epsilon S}$$

Si nous utilisons deux condensateurs pour modéliser la ligne, nous devons diviser par deux chacun des condensateurs car alors :

$$(11) \quad \frac{1}{C'p} = \frac{1}{p} \frac{x}{2\epsilon S}$$

le condensateur n'est associé qu'à la demi longueur de la ligne. Comme indicateur nous devons retrouver la valeur propre de la ligne sans pertes donnée par l'équation caractéristique :

$$(12) \quad LC\omega^2 - 1 = Lp + \frac{1}{p} \frac{x}{2\epsilon S} + \frac{1}{p} \frac{x}{2\epsilon S} = Lp + \frac{1}{p} \frac{x}{\epsilon S}$$

Or l'impédance de la maille vaut après l'opération de division :

$$Lp + \frac{1}{p} \frac{x}{\epsilon S} = Lp + \frac{1}{Cp}$$

qui conduit bien à la même valeur propre.

Nous allons maintenant brancher une charge sur chaque branche du  $\pi$  (notons que dans ce schéma les condensateurs d'extrémités valent  $C/2$ ,  $C$  étant calculée suivant 6, idem pour  $g$ ).

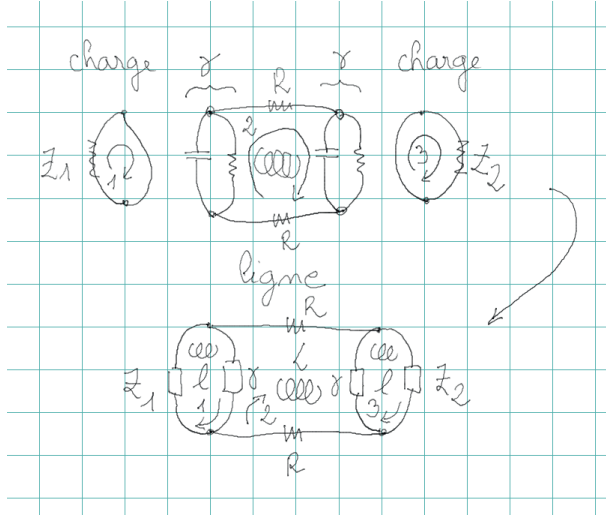


FIGURE 1

La figure 1 illustre le branchement de deux charges à chaque extrémité de la ligne courte en  $\pi$ . En appelant  $\gamma$  l'impédance résultant de la mise en parallèle du demi condensateur et de la demi conductance (grandeurs associées à la demi-longueur dans

le schéma en  $\pi$ ). Dans un premier temps nous collectionnons les trois mailles primitives  $z_i$  en réalisant leur somme directe  $z = \oplus_{i=1}^3 z_i$ , soit :

$$(13) \quad z = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_t & 0 \\ 0 & 0 & z_2 \end{bmatrix}$$

Pour brancher la maille 1 à l'entrée de la ligne, maille 2 puis la maille 2 avec la charge maille 3, nous avons juste à ajouter les impédances partagées en termes extra-diagonaux et aux mailles connectées à la ligne. Soit à transformer  $z$  suivant :

$$(14) \quad z \rightarrow \zeta = \begin{bmatrix} z_1 + \gamma & -\gamma & 0 \\ -\gamma & z_t & -\gamma \\ 0 & -\gamma & z_2 + \gamma \end{bmatrix}$$

Enfin des inductances doivent être ajoutées intervenant dans les connexions créées, notées  $l$  :

$$(15) \quad \zeta = \begin{bmatrix} z_1 + \gamma + lp & -\gamma & 0 \\ -\gamma & z_t & -\gamma \\ 0 & -\gamma & z_2 + \gamma + lp \end{bmatrix}$$

La procédure de construction utilisée ici est basée sur un partage de frontière. La ligne, avant d'être partagée est réduite à un circuit  $R$  correspondant aux fils. Nous écrivons :  $z'_t = 2R + 2L_{ep}$ . La première opération crée la somme directe des trois composants :

$$(16) \quad z = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z'_t & 0 \\ 0 & 0 & z_2 \end{bmatrix}$$

La seconde opération crée le système constitué par la connexion sur la frontière partagée  $\gamma$  :

$$(17) \quad \zeta = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z'_t & 0 \\ 0 & 0 & z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma & 0 \\ -\gamma & 2\gamma & -\gamma \\ 0 & -\gamma & \gamma \end{bmatrix}$$

Dans une troisième opération nous définissons l'inertie  $\mathcal{L}$  du système :

$$(18) \quad \mathcal{L} = \begin{bmatrix} l & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix}$$

Nous avons alors à résoudre, si  $T$  est le vecteur des sources :

$$(19) \quad T_\mu - \mathcal{L}_{\mu\nu} p k^\nu = \zeta_{\mu\nu} k^\nu$$

L'ensemble peut être compacté en une seule maille. En effet si les qualités de connexions l'autorisent, les impédances  $z_1$  ou  $z_2$  et  $\gamma$  peuvent être mises en parallèle :

$$z_{e1} = \frac{z_x}{z_x C p + 1}$$

Le vecteur des sources peut interpeler certains dans ce schéma dans la mesure où le générateur est en série avec la seule charge  $z_1$  et non avec le couple  $z_1, \gamma$  en parallèle. Nous reviendrons plus en détail sur l'usage de source de courant. Pour ce premier usage il nous suffit d'opérer une transformation entre le schéma d'un générateur  $e$  en série avec  $z_1$  qui constitue un schéma de Thévenin en schéma de Norton avec un générateur de courant  $z_1 k^1$  en parallèle de  $z_1$ . Alors  $T = z_1 k^1$ . L'opérateur d'impédance est réduit à la seule maille  $\zeta = z_{e1} + z_{e2} + z_t$ .

Les incertitudes se reportent sur chaque terme, calculées suivant la même démarche que pour la résistance. Alors :

$$(20) \quad \delta T_\mu - \delta \mathcal{L}_{\mu\nu} p k^\nu = \delta \zeta_{\mu\nu} k^\nu$$

L'utilisateur de ce modèle doit être prévenu de ses limites. Si nous considérons la dérivation de l'excitation, c'est une succession d'impulsions. L'impulsion la plus courte dans le temps, de durée  $T$  doit être comparée au temps d'aller-retour d'une onde dans la ligne  $\tau = x/v$ . Nous devons respecter  $T > 10\tau$ .

Quatre expressions d'impédances caractéristiques de lignes sont particulièrement utiles :

- (1) la ligne coaxiale  $z_c = \frac{1}{2\pi v\epsilon} \ln \left( \frac{\phi_e}{\phi_i} \right)$ .  $\phi_e$  est le diamètre externe et  $\phi_i$  le diamètre interne ;
- (2) la ligne bifilaire  $z_c = \frac{1}{v\pi\epsilon} \ln \left( \frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1} \right)$ .  $d$  est le diamètre des fils et  $D$  la distance entre centres des fils ;
- (3) un fil au-dessus d'un plan  $z_c = \frac{1}{2v\pi\epsilon} \ln \left( \frac{2h}{d} + \sqrt{\left(\frac{2h}{d}\right)^2 - 1} \right)$ .  $h$  est la hauteur entre le centre du fil et le plan,  $d$  le diamètre du fil ;
- (4) ligne bifilaire blindée  $z_c = \frac{1}{v\pi\epsilon} \operatorname{arccosh} \left( 2 \frac{D}{d} \left[ \frac{4R^2 - d^2}{4R^2 + d^2} \right] \right)$ .  $R$  est le rayon du blindage,  $d$  le diamètre des fils,  $D$  la distance entre centre des fils. Nous supposons ici  $d/D < 0,4$  et  $D/R < 1,7$ .

## 4. LIGNES EN T COURTES

Dans un diagramme en T ce sont cette fois les résistances, puis après jonction les conductances qui sont divisées par deux. La construction diffère de celle du schéma en  $\pi$  car avant usage, la ligne en T a 2 mailles alors que la ligne en  $\pi$  a une maille. La figure 2 présente ces mécanismes. Notons que pour cette topologie, la résistance  $R$  est associée à la demi-longueur de la ligne et l'inductance de même. De fait si  $R^1$  est la résistance par mètre de la ligne et  $L^1$  l'inductance par mètre alors  $R = R^1/2$  et  $L = L^1/2$ .

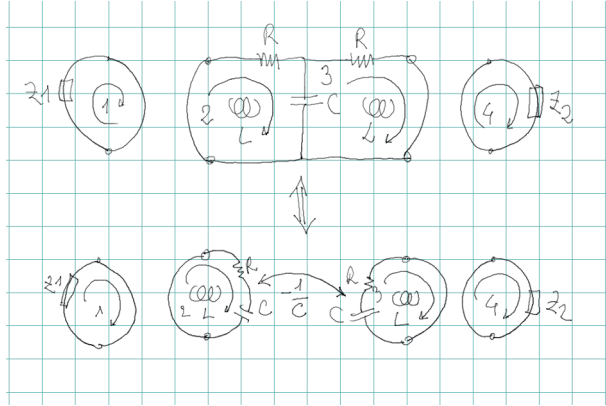


FIGURE 2

Les deux schémas l'un au-dessus de l'autre sont équivalents. Les deux schémas centraux sont topologiquement et strictement équivalents car ils ont le même tenseur principal. Ce schéma central a pour opérateur :

$$(21) \quad z = \begin{bmatrix} R + \frac{1}{C_p} + Lp & -\frac{1}{C_p} \\ -\frac{1}{C_p} & R + \frac{1}{C_p} + Lp \end{bmatrix}$$

Au départ le problème est posé en réalisant la somme directe des mailles des charges 1 et 2  $z_1$  et  $z_2$  et de la structure de ligne  $z$  :  $z' = z_1 \oplus z \oplus z_2$ . Puis nous faisons appel à une connectivité qui décrit le fait que la maille 1 est scindée avec la maille 2, et la maille 3 est scindée avec la maille 4. Autrement dit les mailles 1 et 2 n'en forme plus qu'une 1', et les mailles 3 et 4 n'en forme plus qu'une 2'.

Nous partons de la somme directe :

$$(22) \quad z' = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R + \frac{1}{C_p} + Lp & -\frac{1}{C_p} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_p} & R + \frac{1}{C_p} + Lp & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_2 \end{bmatrix}$$

La connectivité est donnée par :

$$(23) \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elle transforme la collection des mailles séparées en circuit de la ligne chargée. Nous calculons  $\zeta = \Lambda^T z' \Lambda$ .

$$(24) \quad \zeta = \begin{bmatrix} z_1 + R + \frac{1}{C_p} + Lp & -\frac{1}{C_p} \\ -\frac{1}{C_p} & z_2 + R + \frac{1}{C_p} + Lp \end{bmatrix}$$

En prenant en compte l'incertitude attachée aux composants nous trouvons pour  $\delta\zeta$  l'expression :

$$(25) \quad \delta\zeta = \begin{bmatrix} \delta z_1 + \delta R + \frac{\delta C}{C^2 p} + \delta Lp & -\frac{\delta C}{C^2 p} \\ -\frac{\delta C}{C^2 p} & \delta z_2 + \delta R + \frac{\delta C}{C^2 p} + \delta Lp \end{bmatrix}$$

Les variations pouvant être positives ou négatives. Ici  $R$  et  $L$  sont les demis valeurs par mètre alors que le condensateur (et la conductance associée) sont les valeurs par mètre. Les calculs des paramètres utilisent les mêmes équations que pour la ligne courte en  $\pi$ .

De même les conditions d'utilisation en bande passante sont identiques à celles de la ligne en  $\pi$ . Lorsque nous approchons de ces limites, le modèle en T sera plus performant dans ses résultats si les conditions de charges sont faibles. A contrario, le modèle en  $\pi$  est préférable pour des charges de fortes valeurs.

Dans la bande utile, chaque modèle peut présenter un intérêt particulier suivant les cas d'usage. Par exemple, si nous ne désirons pas avoir le détail du courant dans les charges, le modèle en  $\pi$  peut être réduit à une maille unique.



## 5. LIGNES COURTES EN $\pi$ COUPLÉES

Nous considérons les impédances d'extrémités  $z$ . En parallèle aux impédances  $\gamma$ , nous obtenons  $\gamma'$  :

$$(26) \quad \gamma' = \frac{\gamma z}{\gamma + z}$$

La ligne courte est réduite à une maille  $Lp + R + 2\gamma'$ . Si deux lignes de ce type sont voisines dans un même toron, un couplage apparaît entre les deux lignes. Ce couplage est de deux natures et est de champ proche :

- (1) en champ magnétique : couplage par mutuelle inductance ;
- (2) en champ électrique : couplage capacitif.

Nous notons avec un indice 1 les paramètres de la première ligne et 2 ceux de la seconde ligne. La mutuelle inductance et les capacités de couplages, réparties aux extrémités, sont représentées figure 3.

Le couplage est traduit par l'adjonction de deux mailles et la somme directe des deux lignes. Les deux mailles créées par le couplage capacitif vont aussi porter des charges différentielles éventuelles. Elles apparaissent comme des objets en propre engendrés par le voisinage des deux lignes.

En fait le schéma précédent peut être élaboré différemment et plus adéquatement. Nous voulons entre autre faire apparaître la structure partagée par les deux lignes. La figure 4 présente la topologie choisie.

La branche commune qui correspond aux retours communs aux deux lignes a une impédance (non notée sur le dessin)  $R_{mc}$ . Cette impédance est à l'origine du couplage par impédance commune, couplage rarement mis en évidence par les codes de ligne classiques.

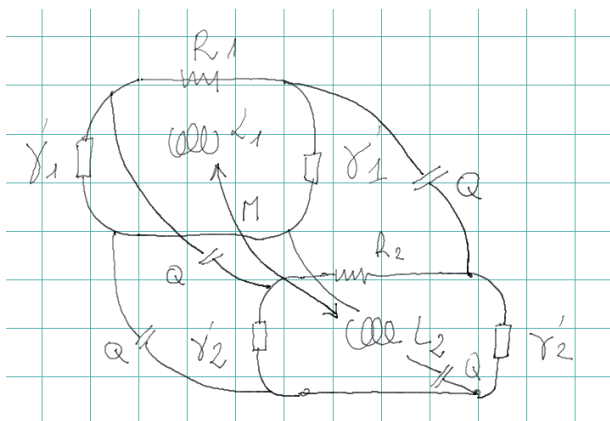


FIGURE 3

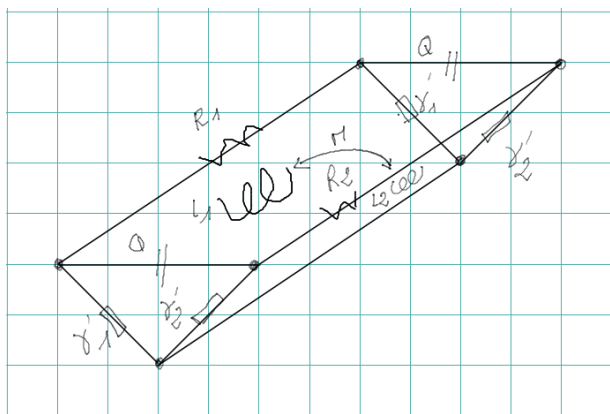


FIGURE 4

Nous devons choisir un ordonnancement de la topologie le plus adéquat possible pour ensuite étendre la technique à  $N$

lignes couplées. L'opérateur du problème devient :

$$\zeta = \begin{matrix} (27) \\ \left[ \begin{array}{cccc} \gamma'_1 + \gamma'_2 + \frac{1}{Qp} & \gamma'_1 & \gamma'_2 & 0 \\ \gamma'_1 & R_1 + R_{mc} + L_1 p + 2\gamma'_1 & -Mp - R_{mc} & \gamma'_1 \\ \gamma'_2 & -Mp - R_{mc} & R_2 + R_{mc} + L_2 p + 2\gamma'_2 & \gamma'_2 \\ 0 & \gamma'_1 & \gamma'_2 & \gamma'_1 + \gamma'_2 \frac{1}{Qp} \end{array} \right] \end{matrix}$$

L'opérateur est organisé avec les extrémités comme des équipements qui encadrent la matrice centrale rapportée aux liaisons filaires. Le plan commun est partagé via l'impédance commune  $R_{mc}$ . Si une impédance différentielle est branchée (nous utilisons les deux lignes couplées comme une ligne bifilaire sur une structure commune, plan ou blindage), elle vient remplacer le condensateur  $Q$ . La figure 5 montre la disposition des mailles et les propriétés des branches hors inductances.

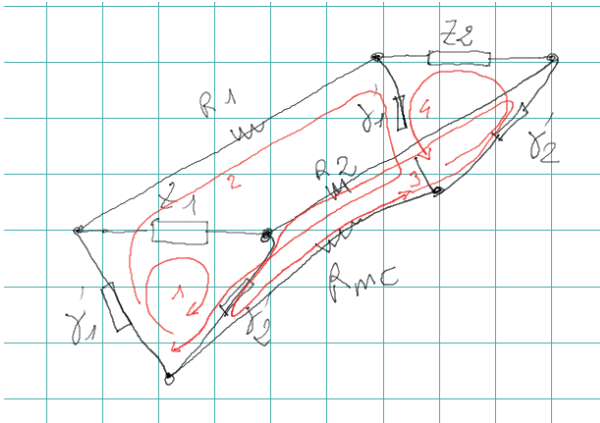


FIGURE 5

A l'opérateur des impédances vient s'ajouter celui des inductances où l'on peut considérer celles d'extrémités (éventuellement négligeables),  $l_x$  pour obtenir :

$$(28) \quad \mathcal{L} = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & -M & 0 \\ 0 & -M & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_2 \end{bmatrix}$$

Nous résolvons  $T_a - \mathcal{L}_{ab}pk^b = \zeta_{ab}k^b$ . Cette équation est l'équation de la ligne bifilaire courte. Notez que les sources peuvent être placées indifféremment aux extrémités : sur les modes communs ou les modes différentiels, ou sur les liaisons dans le cas d'un couplage avec le champ que nous verrons ultérieurement. Les paramètres des lignes sont déterminés comme précédemment. Pour exprimer la mutuelle inductance, nous pouvons soit utiliser la formule de Neumann que l'on résout numériquement par une méthode intégrale (une dizaine de segments suffit en général pour estimer correctement sa valeur) :

$$(29) \quad M = \mu \int_{l_1} \int_{l_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{4\pi R_{12}}$$

ou bien exploiter une relation analytique pour estimer cette mutuelle inductance :

$$(30) \quad M = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \left[ 1 + \left( \frac{2h}{s} \right)^2 \right]$$

$s$  est la distance entre ligne,  $h$  la hauteur commune au plan. Les condensateurs  $Q$  sont a minima les condensateurs de la ligne différentielle en réduisant la contribution des fils à une portion de périmètre, l'autre portion allant vers la structure. S'inspirant des calculs précédents et en notant  $\Omega$  l'opérateur des seules impédances hors inductances nous avons :

$$\begin{aligned}
 a &= \delta R_1 + \delta R_{mc} + \delta L_1 p + 2\delta\gamma'_1 \\
 b &= \delta R_2 + \delta R_{mc} + \delta L_2 p + 2\delta\gamma'_2 \\
 c &= \delta\gamma'_1 + \delta\gamma'_2 \frac{\delta Q}{Q^2 p}
 \end{aligned}$$

$$(31) \quad \delta\Omega = \begin{bmatrix} \delta\gamma'_1 + \delta\gamma'_2 + \frac{\delta Q}{Q^2 p} & \delta\gamma'_1 & \delta\gamma'_2 & 0 \\ \delta\gamma'_1 & a & -\delta M p - \delta R_{mc} & \delta\gamma'_1 \\ \delta\gamma'_2 & -\delta M p - \delta R_{mc} & b & \delta\gamma'_2 \\ 0 & \delta\gamma'_1 & \delta\gamma'_2 & c \end{bmatrix}$$

et :

$$(32) \quad \delta\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \delta l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta L_1 & -\delta M & 0 \\ 0 & -\delta M & \delta L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta l_2 \end{bmatrix}$$

L'impédance de structure est en très basses fréquences liée à la structure dans son ensemble. Quand la fréquence augmente l'effet pelliculaire réduit l'épaisseur  $d$  effective de transport et l'effet de proximité réduit la largeur  $W$  de conduction. Nous pouvons évaluer cet effet en considérant qu'à la fréquence de