

MATHEMATIQUES  
2<sup>e</sup> Cycle

Analyse de la variable complexe

Cours et Exercices corrigés

Raoul BILOMBO

Editions

## *Avant-propos*

*La théorie des fonctions de la variable complexe a occupé de nombreux mathématiciens pendant tout le 19<sup>ème</sup> siècle et une bonne partie du 20<sup>ème</sup>. Nous pouvons citer : Augustin Louis Cauchy (1789-1857) ; Karl Friedrich Gauss (1777-1855) ; Bernhard Riemann (1826-1866) ; Karl Weierstrass (1815-1897) ; Niels Hendrik Abel (1802-1829) ; Henri Poincaré (1854-1912) ; Jacques Hadamard (1865-1963) ; Hermann Weyl (1885-1955).*

*L'essentiel de la théorie sera développé par Cauchy, Riemann, Weierstrass et finalisée en partie avec les travaux d'Henri Poincaré sur les fonctions automorphes. Cette théorie est reliée en partie au développement de la Physique, l'automatisme et tout particulièrement à celui de l'électromagnétisme ; les théories de la transformée de Fourier puis celle de Laplace-Carson ainsi que la naissance du calcul symbolique d'Olivier Heaviside montreront bien la puissance des outils considérés ; tout ceci aboutira à la généralisation la plus forte avec la théorie des distributions de Laurent Schwarz en 1945.*

*L'analyse complexe est la branche de l'analyse mathématique qui étudie les suites, séries et fonctions de la variable complexe. Elle permet la généralisation de nombreux concepts de l'analyse réelle aux fonctions de variables complexes. Cette branche de l'analyse trouve de nombreuses applications en mathématiques et en sciences exactes. Cette leçon constitue une introduction aux fonctions holomorphes d'une variable.*

*Ce cours est enseigné par l'auteur de 2002-2018 à l'Ecole Normale Supérieure de l'Université Marien Ngouabi, aux étudiants de troisième année de Licence et de première année de master, notamment aux étudiants de Sciences physiques.*

*Cette leçon s'adresse aux étudiants de Licence 3 et Master 1 des sciences exactes, étudiants des grandes écoles et cycle de CAPES, ou d'Agrégation de mathématiques.*

*L'ouvrage renferme des nombreux exercices en guise des Travaux dirigés, pour permettre au lecteur d'assimiler cette leçon et être capable de résoudre les problèmes posés dans de nombreux domaines de la vie.*

*Plusieurs excellents ouvrages en français traitent des fonctions d'une variable complexe. Le lecteur pourra s'y reporter pour des développements non traités dans le présent livre ou pour découvrir d'autres points de vue.*

## ***Table des matières***

<i>Chapitre I : Fonctions d'une variable complexe .....</i>	<i>1</i>
<i>Chapitre II : Séries entières .....</i>	<i>2</i>
<i>Chapitre III : Fonctions holomorphes .....</i>	<i>11</i>
<i>Chapitre IV : Intégrale par rapport à une variable complexe ...</i>	<i>17</i>
<i>Chapitre V : Séries de Taylor et de Laurent .....</i>	<i>20</i>
<i>Chapitre VI : Calcul des résidus des fonctions .....</i>	<i>26</i>
<i>Chapitre VII : Calcul des intégrales définies .....</i>	<i>33</i>
<i>Chapitre VIII : Enoncés des Travaux dirigés .....</i>	<i>40</i>
<i>Chapitre IX : Corrigés des Travaux dirigés .....</i>	<i>50</i>

# Chapitre I: Fonctions d'une variable complexe 1

## 1. Généralités

### a) Définition 1

On appelle fonction d'un variable complexe, toute application de  $E$  dans  $C$  avec  $E \subseteq C$  définie par :  $f : E \rightarrow C$

$$\forall z \in C, z \mapsto f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y) \quad (P = \operatorname{Re} f, Q = \operatorname{Im} f)$$

### b) Exemples

\*  $z \mapsto f(z) = \bar{z} = x - iy$

\*  $z \mapsto f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$

\*  $C$  est muni de la distance naturelle :  $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$

## 2. Limites

### a) Définition 2

Soit  $f$  définie dans un voisinage de :  $z_0$  exclu ; la définition habituelle donne :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \text{ tel que } |z - z_0| < \alpha \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon$$

Cette définition est équivalente à :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} L \text{ et } \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} L \text{ pour } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$$

### b) Propriétés

Tous les théorèmes généraux sur les limites sont applicables (somme, produit, etc.)

## 3. Continuité

### a) Définition 3

$$f \text{ est continue au point } z_0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

Cette définition est équivalente à :  $\operatorname{Re} f$  et  $\operatorname{Im} f$  sont continues au point  $(x_0, y_0)$

### b) Propriétés

Tous les théorèmes généraux (somme, produit, etc.) sur la continuité locale ou globale sont applicables.

#### 4. Dérivation

Soit  $f$  définie dans un ouvert  $\Omega$  contenant  $z_0$  on a :

$f$  est dérivable au point  $z_0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lambda_0$

$\lambda_0$  : est la constante complexe finie que l'on note :  $f'(z_0)$

### Chapitre II: Séries entières

#### I. Définition

On appelle série entière toute série de fonctions de terme général  $u_n = a_n x^n$  ( $a_n$  et  $x$  sont réels ou complexes).

**Exemple :**  $u_n = x^n$  ( $\forall n, a_n = 1$ )

**Remarque :** Si  $x = 0$ , alors  $u_n = 0$  et la série de terme général  $(u_n)$  converge.

#### II. Rayon de convergence

##### Théorème

Etant donné une série entière, s'il existe un réel  $R > 0$  tel que :

$|x| < R \Rightarrow$  la série est absolument convergente

$|x| > R \Rightarrow$  la série diverge

$|x| = R \Rightarrow$  la série converge ou diverge suivant les cas.

##### Remarque

Si  $|x| < R \Rightarrow$  la somme de la série est la fonction  $f$  telle que :

$$\forall |x| < R, f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n a_i x^i = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

#### Définitions

1) Si la série entière est réelle, l'intervalle  $] -R, R[$  est appelé : intervalle de convergence.

2) Si la série est complexe, le disque  $\{x; |x| < R\}$  est appelé : disque de convergence

3) Dans les deux cas,  $R$  est appelé rayon de convergence.

4) Si la série entière converge pour tout  $x$ , on dit que  $R$  est infini

5) Si la série diverge pour tout  $x$ , on dit que  $R$  est nul

### III. Détermination du rayon de convergence

#### 1) Utilisation de la règle de d'Alembert

Si  $x \neq 0$ , alors  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x|$  et on vérifie les résultats suivants :

a) Si  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow l \neq 0 \Rightarrow R = \frac{1}{l}$

b) Si  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow 0 \Rightarrow R = +\infty$

c) Si  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow +\infty \Rightarrow R = 0$

#### 2) Utilisation de la règle de Cauchy

a) Si  $\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow l \neq 0 \Rightarrow R = \frac{1}{l}$

b) Si  $\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow 0 \Rightarrow R = +\infty$

c) Si  $\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow +\infty \Rightarrow R = 0$

#### Remarque :

Dans certains cas, on peut déterminer R sans avoir recours aux règles précédentes.

#### 3) Exemples d'application

a)  $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$

Soit  $u_n = \frac{z^n}{n!}$ ,  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{n!}{(n+1)!} |z| = \frac{n!}{n!(n+1)} |z| = \frac{|z|}{n+1} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$  donc la série est

absolument convergente, quel que soit x, le rayon de convergence est  $R = +\infty$

b)  $\sum_{n \geq 0} n! z^n$

Soit  $u_n = n! z^n$ ,  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = (n+1) |z| \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} +\infty$  Donc la série entière  $\sum_{n \geq 0} n! z^n$  est divergente

quel que soit x différent de 0, le rayon de convergence est  $R = 0$ .

c)  $\sum_{n \geq 0} x^n$        $u_n = x^n$     ici  $a_n = 1$  et  $R = 1$ ,  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = |x|$

Pour  $|x| < 1 \Rightarrow$  la série  $\sum_{n \geq 0} x^n$  est absolument convergente

Pour  $|x| > 1 \Rightarrow$  la série  $\sum_{n \geq 0} x^n$  est divergente

d)  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$     ici  $u_n = \frac{x^n}{n}$  et  $a_n = \frac{1}{n}$ ,  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n}{n+1} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 1 \Rightarrow R = 1$

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{n}{n+1} |x| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x|$$

Pour  $|x| < 1 \Rightarrow$  la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$  est absolument convergente

Pour  $|x| > 1 \Rightarrow$  la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$  est divergente

#### IV. Convergence uniforme et continuité

##### 1. Convergence uniforme

Soit un réel  $\rho$  vérifiant la double inégalité  $0 < \rho < R$ . On a l'implication :

$$\forall x, |x| \leq \rho \Rightarrow |a_n x^n| \leq |a_n| \rho^n$$

On démontre que la série à termes réels  $|a_n| \rho^n$  est convergente. Il en résulte que la série  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  est normalement convergente et, donc uniformément convergente à l'intérieur du cercle de convergence.

##### 2. Continuité

En outre, la fonction  $a_n x^n$  étant continue, il en est de même de la somme de la série  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  i.e. de la fonction  $f$  définie par :

$$\forall x, |x| < R, f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

#### Conséquence

On déduit de la continuité de la somme  $f$  le théorème dit des zéros isolés :

### Théorème

Si les coefficients  $a_n$  ne sont pas tous nuls, il existe un réel  $\rho$ , vérifiant la double inégalité

$0 < \rho < R$ , tel que :  $0 < |x| < \rho \Rightarrow f(x) \neq 0$  Il en résulte l'implication :

$\forall x, |x| < R, f(x) = 0 \Rightarrow \forall n, a_n = 0$  Il en résulte ensuite pour les deux séries  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  et

$\sum_{n \geq 0} b_n x^n$  qui ont même rayon de convergence  $R$  et pour sommes respectives  $f$  et  $g$  :

$\forall x, |x| < R, f(x) = g(x) \Rightarrow \forall n, a_n = b_n$

### V. Multiplication par un scalaire

Soit la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  de rayon de convergence  $R$ , de somme  $f(x)$ , et une constante  $\lambda \neq 0$  On démontre :

### Théorème

La série  $\sum_{n \geq 0} \lambda a_n x^n$  a un rayon de convergence égal à  $R$ , et pour somme  $\lambda f(x)$

## VI. Addition et Multiplication

Soient deux séries entières  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$  de rayons de convergence respectifs  $R$  et  $R'$  de sommes respectives  $f(x)$  et  $g(x)$ . On démontre :

### Théorème

1) La série de terme général  $(a_n + b_n)x^n$

\* a un rayon de convergence au moins égal à  $\min(R, R')$ . C'est  $\min(R, R')$  si  $R \neq R'$  ;

\* a pour somme  $f(x) + g(x)$  si  $|x| < \min(R, R')$  Alors, on a :

$$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n + \dots = (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots) + (b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + \dots)$$

2) La série de terme général :  $(a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0)x^n$

\* a pour rayon de convergence au moins égal à  $\min(R, R')$

\* a pour somme  $f(x).g(x)$  si  $|x| < \min(R, R')$  Alors on a :

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots + (a_0b_n + \dots + a_nb_0)x^n = (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots).(b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + \dots)$$

**VII. Dérivation – Intégration**

Soit la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  de rayon de convergence  $R$ , de somme  $f(x)$ .

**1. Dérivation****Théorème**

La série de terme général  $na_n x^n$ , obtenue en dérivant terme à terme la série  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ ,

- a même rayon de convergence  $R$  ;
- a pour somme  $\forall x, |x| < R, f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + na_n x^{n-1} + \dots$

**2. Intégration****Théorème**

La série de terme général  $a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$  a même rayon de convergence  $R$  que la série  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$

\* Si  $F$  est la primitive de  $f$  qui s'annule pour  $x = 0$ , on a l'égalité :

$$\forall x, |x| < R, F(x) = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \quad (1)$$

\* Si  $G$  est une autre primitive de  $f$ , on a l'égalité :

$$\forall x, |x| < R, G(x) = G(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \quad (2)$$

En effet,  $G(x) = F(x) + G(0)$

\* Si  $f$  est réelle, l'égalité (1) peut s'écrire :

$$\int_0^x f(t) dt = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \quad (3)$$

**VIII. Développement en série entière d'une fonction  $f(x)$** **1. Définition- Unicité**

Etant donné une fonction  $f$ , supposons qu'il existe une série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ , de rayon de convergence différent de zéro, telle que :

$$\forall x, |x| < R, f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

## 2. Développement au moyen de la formule de Mac Laurin

7

Nécessairement, on a :  $a_0 = f(0)$

En outre, l'application répétée du théorème sur la dérivation permet de montrer que :

$$a_1 = \frac{f'(0)}{1!}; a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \dots; a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \dots$$

Finalement, on a nécessairement :

$$\forall x, |x| < R, f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

Cette série est appelée développement en série entière de la fonction  $f$  au voisinage de zéro. Elle est unique.

### Conséquences de l'unicité

a) Si une fonction est paire, i.e ; si pour tout  $x$ ,  $f(-x) = f(x)$ , son développement ne contient que des puissances paires de  $n$ . En effet,

$$\forall x, |x| < R, f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

$$\forall x, |x| < R, f(-x) = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 + \dots + (-1)^n a_n x^n + \dots$$

$$\text{D'où } a_1 = -a_1; a_3 = -a_3; \dots; a_{2p+1} = -a_{2p+1}$$

$$\text{i.e. } a_1 = a_3 = \dots = a_{2p+1} = \dots = 0$$

b) On vérifie de même que si une fonction est impaire elle ne contient que des puissances impaires de  $x$ .

## 2. Développement au moyen de la formule de Mac Laurin

Soit  $f$  une fonction réelle de variable réelle. Supposons que la formule de Mac Laurin soit applicable à un ordre quelconque sur un intervalle  $]-R, R[$

$$\forall x, |x| < R, \exists \theta \in ]0, 1[ / f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

Supposons en outre que :  $\forall x, |x| < R, \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  On en déduit :

$$\forall x, |x| < R, f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) = f(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \xrightarrow{n} f(x)$$

$$\forall x, |x| < R, f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

**Remarque**

Supposons que,  $\forall x, |x| < R$ , la fonction  $f$  et ses dérivées successives soient bornées. La fonction  $f$  admet alors un développement en série entière dont le rayon de convergence est au moins égal à  $R$ . En effet, il existe par hypothèse un réel positif  $M$  tel que :

$$\forall n, n \in \mathbb{N}, \forall x, |x| < R, |f^{(n)}(x)| < M \Rightarrow \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(x) \right| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} M$$

Or,  $u_n = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$  est le terme général d'une série convergente car  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|}{n+2} \rightarrow 0$

Donc,  $u_n \rightarrow 0$  (condition nécessaire de convergence). Il en est de même

de  $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(x)$

**Exemple :**

$$f(x) = e^x, f^{(n)}(x) = e^x, \text{ d'où } \forall R > 0, \forall |x| < R, |f^{(n)}(x)| < e^R$$

Par suite, quelque soit le réel  $x$  on a :  $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (R = \infty)$

**3. Développement au moyen d'une division****Exemple**

On sait que :  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$  Or, si  $|x| < R \Rightarrow \frac{x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Donc

$$|x| < 1, \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad (R = 1)$$