

EDITIONS

ALGEBRE 1

Structures algébriques et Calcul matriciel
Cours et Exercices corrigés

Raoul BILOMBO

AVANT- PROPOS

L'algèbre au sens moderne, à savoir l'étude des structures algébriques indépendamment de leurs réalisations concrètes, ne s'est dégagée que très progressivement au cours du XIX^e siècle, en liaison avec le mouvement général d'axiomatisation de l'ensemble des mathématiques et la préoccupation croissante des mathématiciens de « substituer les idées au calcul » ; jusqu'alors, le propos essentiel de l'algèbre avait été la résolution, par des formules explicites, des équations algébriques.

Les tentatives infructueuses pour résoudre les équations générales de degré supérieur ou égal à cinq, ainsi que les problèmes de la théorie des nombres, conduisirent alors les mathématiciens à introduire des êtres mathématiques de nature nouvelle qui présentaient entre eux des analogies étroites dans leur maniement et par suite à ressentir le besoin de dégager ce qui pourrait être commun à toutes ces situations.

Ils furent ainsi amenés à penser que la « nature » des objets mathématiques étudiés est au fond secondaire, et le mathématicien anglais George Boole pouvait déclarer en 1847 : « La mathématique traite les opérations considérées en elles-mêmes, indépendamment des matières diverses auxquelles elles peuvent être appliquées »

Tout au long du XIX^e siècle va se développer ce processus d'axiomatisation de l'algèbre qui aboutit aux structures actuelles.

Si, dès 1850, les mathématiciens anglais ont dégagé avec une parfaite netteté la notion de loi de composition et l'appliquent à des situations variées (vecteurs, matrices, algèbre de la logique), il faudra attendre 1910 pour trouver dans la vaste synthèse de Steinitz l'exposé abstrait qui marque le début de l'algèbre moderne proprement dite.

Nous pouvons citer les pionniers de l'algèbre, notamment :
DEL FERRO S. (1465-1526), CARDAN J. (1501-1576), VIETE F. (1540-1603)
ROLLE M. (1652-1719), WARING E. (1736-1798), GAUSS C.F. (1777-1855)
GRASSMANN H.G. (1809-1877), GALOIS E. (1811-1832), CAYLEY (1821-1895),
DEDEKIND R. (1831-1916), POINCARÉ H. (1854-1912), FREGE G. (1848-1925),
DICKSON L.E. (1874-1954), NOETHER E. (1882-1935), ROBINSON A. (1918-1974),
MALTSEV A.I. (1909-1967), ZELMANOV E.I. (1955-), LANKLANDS R. (1936-).

L'étude des groupes domine tout d'abord les préoccupations de cette époque; introduite par Cauchy et surtout mise en évidence par Galois qui en a montré l'importance dans la théorie des équations, cette notion va jouer un rôle essentiel dans presque tous les domaines des mathématiques et des sciences physiques.

Ce cours est enseigné par l'auteur de 2002-2019, aux étudiants de première année de Licence à l'Université Libre du Congo (U.L.C.).

Ce cours s'adresse aux étudiants des premières années des sciences exactes, gestion et développement économique.

Grâce à une démarche pédagogique, il permet à l'étudiant de s'entraîner progressivement et d'acquérir des compétences, quelque soit son niveau de départ.

Chaque chapitre est divisé en trois parties :

- les éléments de cours présentant les résultats essentiels à connaître ;
- les énoncés des travaux dirigés classés par thème ;
- les solutions détaillées de tous les travaux dirigés.

Sommaire	Page
1. Raisonnement et Ensembles	5
1.1. Eléments de Cours	5
1.2. Enoncés des Travaux dirigés n°1	11
2. Ensembles, Relations, Applications	12
2.1. Eléments de Cours	12
2.2. Enoncés des Travaux dirigés n°2	19
3. Lois de composition interne, Groupes, Anneaux, Corps	23
3.1. Eléments de Cours	23
3.2. Enoncés des Travaux dirigés n°3	28
4. Arithmétique, Polynômes et Fractions rationnelles.....	31
4.1. Eléments de Cours	31
4.2. Enoncés des Travaux dirigés n°4	35
5. Espaces vectoriels, Endomorphismes	38
5.1. Eléments de Cours	38
5.2. Enoncés des Travaux dirigés n°5	43
6. Matrices, Calcul matriciel	48
6.1. Eléments de Cours	48
6.2. Enoncés des Travaux dirigés n°6	50
7. Correction des Travaux dirigés	56
7.1. Correction des Travaux dirigés n°1	56
7.2. Correction des Travaux dirigés n°2	62
7.3. Correction des Travaux dirigés n°3	78
7.4. Correction des Travaux dirigés n°4	95
7.5. Correction des Travaux dirigés n°5	108
7.6. Correction des Travaux dirigés n°6	134

1. Raisonnement et Ensembles

1.1. Éléments de Cours

1.1.1. Proposition

Une proposition est une assertion à laquelle on peut répondre par VRAI ou FAUX sans ambiguïté.

1.1.2. Exemple

Brazzaville est la capitale du Congo

1.1.3. Forme propositionnelle

Une forme propositionnelle est un énoncé dépendant d'une variable, et qui devient une proposition pour une valeur donnée de la variable.

1.1.4. Exemple

« x entier naturel tel que $2x = 4$ » est une forme propositionnelle, et la proposition est fausse pour $x = 3$.

Dans la suite du chapitre nous ne ferons pas de différence entre une proposition et une forme propositionnelle.

1.1.5. Quantificateurs et symboles

« Quel que soit » et « il existe » sont traduits respectivement par les symboles : \forall et \exists appelés quantificateurs.

De plus « il existe un unique » est traduit par : $\exists!$

Par ailleurs, « tel que » est traduit par : /

1.1.6. Négation d'une proposition

Soit p une proposition. La négation de p , appelée « non p » et notée \bar{p} , est la proposition qui est vraie lorsque p est fausse, et fausse quand p est vraie.

1.1.7. Exemples

* p : il pleut ici en ce moment. \bar{p} : il ne pleut pas ici en ce moment.

* \forall devient \exists , et \exists devient \forall

1.1.8. Proposition « p et q »

Soient p et q deux propositions.

La proposition « p et q » est la proposition qui n'est vraie que dans le cas où p et q le sont simultanément.

1.1.9. Exemples

* « 1 est positif et $\sqrt{2}$ est un entier » est une proposition fausse.

- « $1 < 2$ et $3 = 4$ est une proposition fausse.

1.1.10. Proposition « p ou q »

Soient p et q deux propositions.

La proposition « p ou q » est la proposition qui n'est fausse que dans le cas où p et q le sont simultanément.

1.1.11. Exemples

* « L'homme est un mammifère ou l'homme est immortel » est une proposition vraie.

* « π est un décimal ou $\frac{1}{3}$ est un entier » est une proposition fausse.

1.1.12. Théorème 1

Soient p et q deux propositions.

- i) La négation de « p et q » est « \bar{p} ou \bar{q} ».
- ii) La négation de « p ou q » est « \bar{p} et \bar{q} ».

1.1.13. Exemples

* La négation de « $1 < 2$ et $3 = 4$ » est « $1 \geq 2$ ou $3 \neq 4$ ».

* La négation de « π n'est pas entier ou $\pi \leq 4$ » est « π est entier et $\pi > 4$ »

1.1.14. Implication

Soient p et q deux propositions.

La proposition « si p alors q » ou « p implique q » est notée : « $p \Rightarrow q$ ».

Cette proposition n'est fausse que dans le cas où p est vraie et q est fausse.

1.1.15. Exemples

* « $2 < 1 \Rightarrow 1 < 2$ » est une proposition vraie.

* « $\forall a \in \mathbb{R}, a < 0 \Rightarrow a^2 > 0$ » est une proposition vraie.

1.1.16. Equivalence

Soient p et q deux propositions.

La proposition « p si et seulement si q » ou « p équivalent à q », notée « $p \Leftrightarrow q$ » est : $(p \Rightarrow q)$ et $(q \Rightarrow p)$

1.1.17. Exemple

« $\forall a \in \mathbb{R}, a = 0 \Leftrightarrow a^2 = 0$ » est une proposition vraie.

1.1.18. Théorème 2

Soient p et q deux propositions.

Les propositions $(p \Rightarrow q)$ et $(\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$ sont équivalentes ; c'est-à-dire : $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$

1.1.19. Exemple

Si le test est positif alors le virus est présent \Leftrightarrow si le virus est absent alors le test est négatif.

1.1.20. Démonstration par contraposition

La démonstration par contraposition repose sur le théorème 2.

En effet, pour démontrer $(p \Rightarrow q)$, il revient au même de démontrer $(\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$ qui est la contraposée de $(p \Rightarrow q)$.

1.1.21. Il faut, et il suffit

Soient p et q deux propositions.

Considérons la proposition : « si p alors q ».

- p est une condition suffisante (non nécessaire) pour q : il suffit d'avoir p pour réaliser q .
- q est une condition nécessaire (non suffisante) pour p : il faut q pour avoir p .

1.1.22. Exemple

Si $a < 1$ alors $a < 2$.

« $a < 1$ » est une condition suffisante pour « $a < 2$ ».

Mais cette condition « $a < 1$ » n'est pas nécessaire pour « $a < 2$ », car on peut réaliser « $a < 2$ » sans avoir « $a < 1$ » ($a < 3/2$ par exemple).

« $a < 2$ » est une condition nécessaire pour « $a < 1$ ».

Mais cette condition « $a < 2$ » n'est pas suffisante pour « $a < 1$ » car on peut réaliser « $a < 2$ » sans avoir « $a < 1$ » ($a = 3/2$ par exemple).

1.1.23. Démonstration par l'absurde

On se propose de démontrer que la proposition p est vraie.

On suppose que : \bar{p} est vraie, et on montre qu'il y a une contradiction.

1.1.24. Ensemble

Un ensemble est une collection d'objets vérifiant une propriété commune.

Ces objets sont alors appelés éléments de l'ensemble.

1.1.25. Appartenance

Soit E un ensemble. Si a est un élément de E , on dit que a appartient à E et on note : $a \in E$

1.1.26. Ensemble vide

On dit qu'un ensemble est vide s'il ne contient aucun élément. On note : \emptyset

1.1.27. Sous-ensemble d'un ensemble

Soit E un ensemble.

On dit qu'un ensemble A est un sous-ensemble ou une partie de E si tout élément de A est élément de E

On dit aussi que : A est inclus dans E et on note : $A \subset E$

1.1.28. Sous-ensemble complémentaire

Soient E un ensemble et A une partie de E .

On appelle sous-ensemble complémentaire de A dans E et on note C_E^A ou \overline{A} , le sous-ensemble de E constitué des éléments de E qui n'appartiennent pas à A .

1.1.29. Intersection

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E .

On appelle intersection de A et B le sous-ensemble de E formé des éléments appartenant simultanément à A et B . On note : $A \cap B$

1.1.30. Réunion

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E .

On appelle réunion de A et B le sous-ensemble de E formé des éléments appartenant à A ou B . On note : $A \cup B$

1.2. Enoncés des Travaux Dirigés n° 1**Exercice 1**

Traduire les énoncés suivants à l'aide de symboles.

1. Soit A un sous-ensemble de \mathbb{R} vérifiant : tout élément de A est inférieur ou égal à deux.
2. A est l'ensemble des nombres rationnels dont le carré est supérieur ou égal à un.
3. Il existe un unique élément non nul appartenant à A .
4. Tout élément de A est non nul

Exercice 2

Traduire les énoncés suivants à l'aide de symboles.

1. L'ensemble complémentaire de A est un sous-ensemble de B .
2. Soient A, B, C , trois sous-ensembles de E vérifiant : tout élément appartenant
Simultanément à A et B est aussi élément de C .
3. Il existe un élément appartenant à A ou B et qui n'appartient pas à C .

Exercice 3

Traduire les énoncés suivants à l'aide de symboles.

1. Pour tout réel positif, la racine carrée existe.
2. Pour tout réel strictement supérieur à un, le carré l'est aussi.
3. Si t est strictement supérieur à un, alors il existe un réel m strictement positif tel que $t + m$ soit strictement supérieur à un.
4. Pour que $f(x)$ soit égal à x , il faut donner à x la valeur 2.

5. Il suffit que a soit non nul pour que l'inverse de a existe.
6. Il est nécessaire que x^2 soit strictement inférieur à 1 pour que x soit strictement positif et strictement inférieur à 1.

Exercice 4

Traduire les énoncés suivants à l'aide de phrases.

1. $\forall x \in A, x > -1$
2. $\exists! x \in A / x \neq 1$
3. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$
4. $\exists x \in A \cap B / x \notin C$

Exercice 5

Ecrire la négation de chacune des propositions suivantes.

1. $t \in \mathbb{Z} / a \leq t \leq b$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos x \leq 1$.
3. $\forall a \in I, \forall b \in I, |f(a) - f(b)| \leq M|a - b|$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
5. $\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}, \forall z \in \mathbb{Q}, (x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x = z$.

Exercice 6

Ecrire la contraposée de chacune des propositions suivantes.

1. $\forall x \in I, x \leq 1 \Rightarrow f(x) \in [0,1]$
2. $\forall x \in R, \forall y \in R, x > y \Rightarrow f(x) = f(y).$
3. $\forall x \in R, \forall y \in R, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$
4. $\forall x \in R, f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
5. $t < 1 \Rightarrow \exists m > 0 / t + m < 1.$

Exercice 7

Ecrire l'hypothèse à émettre pour démontrer par l'absurde les propositions suivantes.

1. $A \cap B = \emptyset.$
4. $\forall y \in F, \exists x \in E / y = f(x).$
2. $\forall n \geq m, U_n \leq U_{n+1}$
- 5 $\forall x \in E, \forall y \in E, xy = 1.$
3. $\exists x > 0 / f(x) = x.$

Exercice 8

Traduire les énoncés suivants à l'aide de symboles.

1. Pour tous réels x et y , x étant inférieur ou égal à y , l'intervalle $[x, y]$ est contenu dans I .
2. A est l'ensemble des entiers naturels multiples de trois.
3. A est un sous-ensemble de N contenant au moins un élément pair.

Exercice 9

Ecrire la négation de chacune des propositions suivantes.

1. $t \in [0,1[\cup]1,+\infty[$.
2. $\forall t > 0, \exists m \in \mathbb{N} / \forall n \geq m, |U_n - L| \leq t$.
3. $\forall t > 0, \exists m \in \mathbb{N} / \forall p \geq m, \forall q \geq m, |U_p - U_q| \leq t$.
4. $\forall t > 0, \exists a > 0 / \forall x, |x - x_0| \leq a \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq t$.

Exercice 10

Ecrire l'hypothèse à émettre pour démontrer par l'absurde chacune des propositions suivantes.

1. $\forall A > 0, \exists m > 0 / \forall x > m, f(x) > A$.
2. $\exists a \in \mathbb{R}^* / f(a) = 0$.
3. Il existe un réel t strictement positif tel que l'intervalle $]x-t, x+t[$ soit contenu dans A .

2. Ensembles, relations, applications

2.1. Eléments de Cours

2.1.1. Ensembles disjoints

On dit que deux ensembles sont disjoints lorsque leur intersection est vide.

2.1.2. Egalité d'ensembles

$A = B$ si et seulement si : $(A \subset B \text{ et } B \subset A)$

2.1.3. Ensemble des parties d'un ensemble

Soit E un ensemble. Les sous-ensemble ou parties de E constituent un ensemble que l'on note :

$$P(E). \quad A \in P(E) \Leftrightarrow A \subset E$$

2.1.4. Ensemble fini et cardinal

On dit qu'un ensemble E est fini si le nombre de ses éléments est fini ; ce nombre est alors appelé cardinal de l'ensemble E et on le note $\text{Card } E$.

2.1.5. Théorème 1

Soient E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$ et p un entier inférieur ou égal à n .

Le nombre de sous-ensembles à p éléments de E est :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

2.1.6. Théorème 2 (formule du binôme de Newton)

Soient a, b deux nombres complexes et n un entier naturel.

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^n C_n^k a^k b^{n-k} = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \dots + C_n^{n-1} a^{n-1} b^1 + C_n^n a^n b^0$$

2.1.7. Propriétés des relations

Soit \mathcal{R} une relation binaire définie sur un ensemble E .

- **Réflexivité** : On dit que \mathcal{R} est une relation réflexive si :

$$\forall x \in E, x\mathcal{R}x$$
- **Symétrique** : On dit que \mathcal{R} est une relation symétrique si :

$$\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$$
- **Antisymétrique** : On dit que \mathcal{R} est une relation antisymétrique si :

$$\forall (x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$$
- **Transitivité** : On dit que \mathcal{R} est une relation transitive si :

$$\forall (x, y, z) \in E^3, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

2.1.8. Relation d'équivalence

Une relation d'équivalence est une relation qui est à la fois réflexive, symétrique et transitive.

2.1.9. Classe d'équivalence, ensemble quotient

Soient \mathcal{R} une relation d'équivalence définie sur un ensemble E et a un élément de E .

On appelle classe d'équivalence de a et on note \dot{a} , l'ensemble $\dot{a} = \{b \in E / a\mathcal{R}b\}$

L'ensemble des classe d'équivalence de \mathcal{R} est appelé ensemble quotient de E par \mathcal{R} et est noté E/\mathcal{R}

2.1.10. Relation d'ordre

Une relation d'ordre est une relation qui est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.

2.1.11. Ordre total, ordre partiel

Soit \mathcal{R} une relation d'ordre définie sur un ensemble E .

On dit que \mathcal{R} est une relation d'ordre total s'il est possible de comparer deux éléments quelconques x et y de E pour \mathcal{R} ; c'est-à-dire : $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$.

Dans le cas contraire, on dit que \mathcal{R} est une relation d'ordre partiel.

2.1.12. Application

Soient E et F deux ensembles.

On appelle application de E vers F toute correspondance de E vers F qui, à tout élément de E, associe un élément unique de F.

2.1.13. Propriétés des applications

Soient E, F deux ensembles, et f une application de E vers F.

- Injection : On dit que l'application f est injective si :

$$\forall (x, y) \in E^2, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

Autrement dit, $\forall (x, y) \in E^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

- Surjection : On dit que l'application f est surjective si :

$$\forall y \in F, \exists x \in E / y = f(x)$$

- Bijection : On dit que l'application f est bijective si elle est à la fois injective et surjective.

Autrement dit, $\forall y \in F, \exists! x \in E / y = f(x)$

2.1.14. Bijection réciproque

Soient E, F deux ensembles, et f une bijection de E vers F.

On obtient : $\forall y \in F, \exists! x \in E / y = f(x)$

La bijection : $F \rightarrow E \quad y \mapsto x$ est appelée bijection réciproque de f et est notée f^{-1}

Ainsi : $\forall (x, y) \in E \times F, f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

2.1.15. Applications égales

Soient E et F deux ensembles, et f, g deux applications de E vers F .

On dit que f et g sont égales si, pour tout élément x de E , on a : $f(x) = g(x)$.

On note alors : $f = g$

2.1.16. Application identité

Soit E un ensemble.

On appelle application identité dans E , l'application qui, à tout élément x de E , associe x ; cette application est notée « id ».

2.1.17. Théorème 3

Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p .

Le nombre d'applications de E vers F est p^n

2.1.18. Image et image réciproque

Soient E et F deux ensembles, et f une application de E vers F .

Soient, A une partie de E , et B une partie de F .

- On appelle image de A par f , le sous-ensemble de F , noté $f(A)$ et défini par : $f(A) = \{y \in F / \exists x \in A, y = f(x)\}$
- On appelle image réciproque de B par f , le sous-ensemble, noté $f^{-1}(B)$ de E et défini par : $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$

2.1.19. Application composée

Soient E, F, G trois ensembles, et $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ deux applications.

On note $g \circ f$, l'application définie de E vers G par : $\forall x \in E, g \circ f(x) = g(f(x))$