Editions

RECHERCHE EN MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Méthode de Lagrange-Galerkin pour les densités Système interaction.

Raoul BILOMBO

Table des matières Pages

AVANT-PROPOS

Le livre présen**te** une synthèse d'une partie de mes travaux de recherches.

J'ai commencé à travailler sur les modèles de champ-de-phase lors d'un séjour Postdoctoral dans un centre de recherches appliquées. Je me suis ensuite éloigné de cette thématique pour m'orienter vers les problèmes d'interaction fluide-Structure. Actuellement, les problèmes d'interaction fluide-structure constitue L'essentiel de mes thèmes de recherches.

La première partie de ce livre porte sur l'analyse numérique de méthodes D'approximation de systèmes d'interaction fluide – structure ainsi que sur les Questions associées de contrôle optimal. Les résultats de convergence et D'analyse d'erreurs sont obtenus pour une structure rigide. Les simulations Numériques ont été réalisées pour des structures rigides et déformables, avec en Particulier une application à la nage de poissons vue comme un phénomène D'autopropulsion. Les questions de contrôle optimal traitées dans ce livre Concernent un problème de contrôle en temps minimal pour la nage à bas Nombre de Reynolds.

Dans le chapitre 1 de la première partie, je présente des méthodes D'approximation de type Lagrange - Galerkin pour un système d'interaction fluide-rigide. Ces méthodes « monobloc » sont basées sur une interprétation des Termes inertiels des équations de Navier-Stokes incompressibles à l'aide d'une Fonction caractéristique pour une formulation variationnelle globale du système.

Les fonctions caractéristiques approchées des schémas d'approximation Numériques sont construites différemment selon que les densités du fluide et du Rigide sont égale ou pas. Des résultats de convergence et d'estimations d'erreurs Pour une méthode d'Eléments Finis sont présentés.

Le chapitre 2 concerne l'étude d'un système d'interaction fluide-déformable. La Structure immergée est à présent déformable, la déformation n'est pas modifiée Par l'écoulement du fluide. Ce modèle est une généralisation d'un système fluide-rigide.

Une méthode d'approximation de type Lagrange-Galerkin est présentée avec Une fonction caractéristique modifiée par rapport au cas rigide tenant compte La déformation imposée. Les exemples numériques qui sont traités concernent La nage de poisson. Des modèles de déformation 2D et 3D pour la nage sont Présentés et utilisés dans les différentes simulations numériques.

Une problématique de contrôle optimal est abordée au chapitre 3 pour un Système d'autopropulsion à bas nombre de Reynolds. Les équations de Stokes Sont couplées aux équations d'équilibre des forces hydrodynamiques, et on Considère le cas d'une sphère soumise à des déformations axisymétrique et Radiales. Ce système d'EDP se réduit à un système d'équations différentielles Ordinaires. L'étude d'un problème de contrôle en temps minimal est faite sur un Problème linéaire pour lequel des solutions optimales ont été obtenues de façon Explicite.

Ces solutions sont de natures différentes selon qu'on impose ou non une Contrainte sur l'amplitude des déformations.

Enfin, je termine le livre par un ensemble de perspectives de recherches. Ces Perspectives portent sur les problèmes d'interaction fluide-structure. Je présente Perspectives qui sont pour certaines immédiates et s'inscrivent plus dans des Travaux en cours.

La méthode des patches est une méthode de décomposition de domaine de type Schwarz, avec recouvrement complet. Un patch est un sous-domaine $\Omega \subset O$, Dans lequel on veut typiquement résoudre numériquement une EDP, posée dans O, avec plus de précision dans Ω. Le maillage du patch est généralement très fin, Par rapport au maillage du domaine O, qui est plutôt grossier. Il n'y a pas de Conformité du maillage du patch Ω avec celui du domaine O.

Dans le cadre d'un problème d'interaction fluide-structure, résolu avec une Méthode « monobloc », utilisant un maillage fixe du domaine complet O, l'idée Positionner un patch autour de la structure (rigide ou déformable).

Le but est de mieux prendre en compte la géométrie de la structure et Améliorer la précision des calculs sans avoir à raffiner tout le maillage de O.

La méthode des patches est similaire à la méthode FAC (Fast Adaptive Composite Grid) et, elle est également très proche de la méthode de Chimera.

D'autres perspectives sont à plus long terme, j'ai voulu cependant les présenter

De façon assez précise et détaillée.

Cet ouvrage s'adresse aux ingénieurs, aux étudiants des grandes écoles, aux Etudiants de 3eme cycle en Mathématiques et Applications fondamentales, aux Post doctorants des sciences appliquées.

I PREAMBULE

1. Système d'interaction fluide-rigide

1.1 Introduction et Modélisation

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'approximation d'un système fluide-rigide.

Le fluide est supposé visqueux et incompressible et l'écoulement est gouverné ;

Par les équations de Navier-Stokes incompressible.

La modélisation est d'abord présentée dans le cas de la dimension 2 d'espace.

Une extension à la dimension 3 sera donnée à la fin du chapitre suivant pour le ;

Cas d'une structure déformable.

La méthode d'approximation présentée et étudiée dans ce chapitre repose ;

Essentiellement sur une formulation de la variation globale du problème

Correspondant au système complet fluide-rigide.

C'est cette formulation globale qui est discrétisée, conduisant ainsi à une Méthode d'approximation souvent qualifiée de « monobloc » ou bien encore de « Monolithique » dans la mesure où l'écoulement du fluide (vitesse et pression Du fluide) et la vitesse de déplacement du rigide sont calculées simultanément.

D'autre part, les termes inertiels des équations de Navier-Stokes sont formulés à L'aide d'une dérivée particulaire faisant intervenir une fonction caractéristique.

L'approximation en espace est réalisée par une méthode d'Eléments Finis (Galerkin) avec une discrétisation temporelle de la dérivée particulaire (Lagrange). Les méthodes proposées sont donc de type Lagrange-Galerkin. Fonctions caractéristiques approchées sont construites différemment selon : que La densité du fluide est égale ou non à la densité du solide. Le système fluide-Rigide est décrit en dimension 2 d'espace. Ce système occupe un domaine Borné $O \subset R^2$ de bord régulier ∂O. Le corps rigide occupe à l'instant t un sous-Ensemble compact connexe $B(t) \subset O$ de bord régulier $\partial B(t)$.

Le corps rigide est immergé dans le fluide qui remplit le domaine $F(t) = O / B(t)$.

La dynamique du fluide est décrite par les équations de Navier-Stokes Incompressibles et le mouvement du corps rigide obéit aux lois fondamentales De la dynamique à travers les équations des bilans des moments linéaires et Angulaires (lois de Newton).

En ce qui concerne l'écoulement du fluide, les inconnues sont la vitesse Eulérienne u(x, t) et la pression du fluide p(x, t) à l'instant t et en un point : $x \in F(t)$.

Les autres inconnues sont la position $\xi(t)$ du centre de masse du rigide B(t) et θ(t) son angle d'orientation par rapport à l'axe horizontal passant par le centre De masse.

Le système fluide-rigide s'écrit, pour t∈[0, T],

$$\rho_f\left(\frac{\partial u}{\partial t}+(u.\nabla)u\right)-\nu\Delta u+\nabla p=\rho_f f \quad \text{Dans F(t),} \tag{1.1}$$

$$\text{div u} = 0 \quad \text{Dans F(t),} \tag{1.2}$$

$$\text{u} = 0 \quad \text{Sur}\,\partial O, \tag{1.3}$$

$$u=\xi'(t)+\theta'(t)(x-\xi(t))^{\perp} \quad \text{Sur}\,\partial B(t), \tag{1.4}$$

$$m\xi''(t)=-\int_{\partial B(t)}\sigma(u,p)nd\Gamma+\rho_s\int_{B(t)}f(x,t)dx, \tag{1.5}$$

$$J\theta''(t)=-\int_{\partial B(t)}(x-\xi(t))^{\perp}.\sigma(u,p)nd\Gamma+\rho_s\int_{B(t)}(x-\xi(t))^{\perp}.f(x,t)dx, \tag{1.6}$$

Les conditions initiales du système (1.1)-(1.6) sont données par :

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in F(0), \tag{1.7}$$

$$\xi(0)=\xi_0\in R^2,\ \xi'(0)=\xi_1\in R^2,\ \theta(0)=\theta_0=0,\ \theta'(0)=\omega_0\in R \tag{1.8}$$

Les constantes positives ρ_f *et* ρ_s désignent respectivement les densités du fluide

Et du corps rigide, ν > 0 est la viscosité du fluide.

Les constantes m et J sont la masse et le moment d'inertie du corps rigide

Définies par :

$$m=\int_{B(t)}\rho_s dx,\quad J=\int_{B(t)}\rho_s|x-\xi(t)|^2dx \tag{1.9}$$

Elles sont indépendantes du temps t.

La masse et le moment d'inertie étant conservés au cours du temps.

Par ailleurs, f(x, t) est la force extérieure exercée sur le fluide et le corps rigide (Force par unité de masse).

Pour tout $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, on a noté $x^{\perp}$ le vecteur $x^{\perp} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

Le tenseur des contraintes (tenseur de Cauchy) est défini par :

$$\sigma(x,t) = 2\nu D(u) - p(x,t)Id \tag{1.10}$$

Où Id est la matrice identité 2 x 2 et D(u) est le tenseur symétrique des Déformations donné par $D(u) = \frac{\left(\nabla u + \nabla u^{\perp}\right)}{2}$ où $\nabla u^{\perp}$ désigne la matrice transposée De ∇u .

Le corps rigide B(t) = B(ξ,θ) est défini par:

$B(t) = \left\{R_{\theta(t)}\left(y - \xi(0)\right) + \xi(t),\ y \in B(0)\right\}$ Où R_{θ} est la matrice de rotation d'angleθ.

Par ailleurs, on a noté n(x, t) le vecteur unitaire normal au bord $\partial B(t)$ à l'instant t Et au point x, dirigé vers l'intérieur du corps rigide.

Le système d'interaction fluide-rigide (1.1)-(1.8) est caractérisé par le fort Couplage entre les équations non linéaires dans le fluide et les équations de la Dynamique du solide rigide.

D'autre part, les équations de Navier-Stokes sont écrites dans un domaine qui Varie avec le temps et dépend de la position du solide rigide.