Avant-propos

La théorie des matrices qui forme le cœur de l'algèbre linéaire est une des théories mathématiques modernes les plus séduisantes pour la beauté de ses résultats et ses nombreuses applications scientifiques.

Par exemple, des méthodes de "linéarisation" sont fréquemment utilisées pour obtenir des solutions approchées de problèmes complexes et il est bien connu que de nombreuses théories informatiques en recherche opérationnelle et en analyse factorielle, entre autres, utilisent abondamment et de plus en plus aujourd'hui, l'algèbre linéaire grâce aux performances phénoménales des ordinateurs, et davantage encore dans le futur avec le développement de l'intelligence artificielle.

A l'origine, ce mini-cours inspiré des "compléments d'algèbre linéaire" de Lesieur L.Terman R. et Lefebvre J. [3] a été rédigé à l'intention des stagiaires du Deug U.C. (Deug par unités capitalisables) de l'Université Lyon I.

Il couvrait une partie des programmes des modules d'algèbre M_2 et M_6. Il a été depuis, profondément remanié et enrichi par de nombreux exercices et par l'apport de la topologie qui permet souvent des démonstrations élégantes et efficaces.

Une importance primordiale a été accordée au choix des exemples et des exercices, pour la plupart traités in extenso, qui jalonnent ce cours et devraient permettre une bonne et rapide assimilation, même pour un étudiant isolé.

Il s'adresse à tous les étudiants du premier cycle des Universités et des Classes Préparatoires ainsi qu'à tous les scientifiques qui s'intéressent à cette discipline.

Enfin, on trouvera dans la bibliographie, une liste d'ouvrages importants ayant permis la rédaction de ce cours.

Alain RYCKAERT

ETE 2019

SOMMAIRE

CHAP. I MATRICES : Définitions et propriétés fondamentales

§1 Définitions

Définition 1.
Etant donné un corps commutatif K et deux ensembles finis I et J, on appelle **matrice A à éléments dans K** une famille double $(a_{ij})_{(i,\,j)\in I\times J}$, d'éléments de K.

Si I=[1, n] et J=[1, p], on dispose les éléments a_{ij} dans un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes, soit :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$ notée aussi en abrégé $A=(a_{ij})$.

On dit que le premier indice i est l'indice de ligne et le second j l'indice de colonne, l'élément a_{ij} est situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ième colonne.
Une telle matrice est appelée matrice de type $n \times p$ ou simplement matrice $n \times p$.
On note $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ l'ensemble des matrices $n \times p$ et $\mathcal{M}_n(K)$ l'ensemble des matrices $n \times n$ qu'on appelle **matrices carrées d'ordre n**.

Les matrices $1\times p$ sont appelées matrices **uni-lignes**, les matrices $n \times 1$ **uni-colonnes**.

Une matrice obtenue en supprimant des lignes ou des colonnes de A est une **sous-matrice** de A ; si les éléments conservés sont contigus dans A, on dit que c'est un **bloc**.
La matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ est la matrice dont tous les éléments sont nuls. Elle est notée $O_{n,p}$ ou simplement 0.

Matrices associées à une matrice