1.3 Signe d'une fonction

Des Clés pour Etudier le signe d'une fonction :

Dans ce qui suit, on désigne par a et b deux réels tel que $a < b$ et I est un intervalle de la forme $[a;b]$ ou $[a;b[$ ou $]a;b]$ ou $]a;b[$. Note bien, a peut être $-\infty$ et b peut être $+\infty$.

♣Fonctions de signe constant :

1. Soient f une fonction définie sur un intervalle $I=[a;b]$ de $\mathbb{R}$ et α un réel tel que $f(\alpha)\geq 0$. Si le tableau de variation de f est de la forme ci-dessous :

x	a		α		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	↘		$f(\alpha)$		↗

Puisque f est décroissante sur l'intervalle $[a;\alpha]$ et croissante sur l'intervalle $[\alpha;b]$, alors f admet une valeur minimale en α. D'où $(\forall x\in[a;b]) : f(x)\geq f(\alpha)$. Comme $f(\alpha)\geq 0$, alors

$$\boxed{(\forall x\in[a;b]) : f(x)\geq 0}.$$

2. Soient f une fonction définie sur un intervalle $I=[a;b]$ de $\mathbb{R}$ et α un réel tel que $f(\alpha)\leq 0$. Si le tableau de variation de f est de la forme ci-dessous :

x	a		α		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	↗		$f(\alpha)$		↘

Puisque f est croissante sur l'intervalle $[a;\alpha]$ et décroissante sur l'intervalle $[\alpha;b]$, alors f admet une valeur maximale en α. D'où $(\forall x\in[a;b]) : f(x)\leq f(\alpha)$. Comme $f(\alpha)\leq 0$, alors

$$\boxed{(\forall x\in[a;b]) : f(x)\leq 0}.$$

♣Fonctions change de signe :

1. Soient f une fonction définie sur un intervalle $I=[a;b]$ de $\mathbb{R}$ et α un réel tel que $f(\alpha)=0$. Si le tableau de variation de f est de la forme ci-dessous :

x	a		α		b
$f'(x)$		$-$		$-$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	

On a f est strictement décroissante sur l'intervalle $[a;b]$. On traitera deux cas :

(a) Si $x \in [a;\alpha]$, alors $x \leq \alpha$ ce qui donne $f(x) \geq f(\alpha)$. Puisque $f(\alpha) = 0$, alors

$$\boxed{(\forall x \in [a;\alpha]) : f(x) \geq 0}.$$

(b) Si $x \in [\alpha;b]$, alors $x \geq \alpha$ ce qui donne $f(x) \leq f(\alpha)$. Puisque $f(\alpha) = 0$, alors

$$\boxed{(\forall x \in [\alpha;b]) : f(x) \leq 0}.$$

2. Soient f une fonction définie sur un intervalle $I = [a;b]$ de $\mathbb{R}$ et α un réel tel que $f(\alpha) = 0$. Si le tableau de variation de f est de la forme ci-dessous :

x	a		α		b
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

On a f est strictement croissante sur l'intervalle $[a;b]$. On traitera deux cas :

(a) Si $x \in [a;\alpha]$, alors $x \leq \alpha$ ce qui donne $f(x) \leq f(\alpha)$. Puisque $f(\alpha) = 0$, alors

$$\boxed{(\forall x \in [a;\alpha]) : f(x) \leq 0}.$$

(b) Si $x \in [\alpha;b]$, alors $x \geq \alpha$ ce qui donne $f(x) \geq f(\alpha)$. Puisque $f(\alpha) = 0$, alors

$$\boxed{(\forall x \in [\alpha;b]) : f(x) \geq 0}.$$

3. Soient f une fonction définie sur un intervalle $I = [a;b]$ de $\mathbb{R}$ et c un réel. Soient α et β deux réels tels que $f(\alpha) = 0$ et $f(\beta) = 0$. Si le tableau de variation de f est de la forme ci-dessous :

x	a		α		c		β		b
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

On a f est décroissante sur l'intervalle $[a;c]$ et croissante sur l'intervalle $[c;b]$. On traitera quatre cas :

(a) Si $x \in [a;\alpha]$, alors $x \leq \alpha$ ce qui donne $f(x) \geq f(\alpha)$. Puisque $f(\alpha) = 0$, alors

$$\boxed{(\forall x \in [a;\alpha]) : f(x) \geq 0}.$$

(b) Si $x \in [\alpha;c]$, alors $x \geq \alpha$ ce qui donne $f(x) \leq f(\alpha)$. Puisque $f(\alpha) = 0$, alors

$$\boxed{(\forall x \in [\alpha;c]) : f(x) \leq 0}.$$

(c) Si $x \in [c;\beta]$, alors $x \leq \beta$ ce qui donne $f(x) \leq f(\beta)$. Puisque $f(\beta) = 0$, alors

$$\boxed{(\forall x \in [c;\beta]) : f(x) \leq 0}.$$

(d) Si $x \in [\beta;b]$, alors $x \geq \beta$ ce qui donne $f(x) \geq f(\beta)$. Puisque $f(\beta) = 0$, alors

$$\boxed{(\forall x \in [\beta;b]) : f(x) \geq 0}.$$

D'où

$$\boxed{(\forall x \in [a;\alpha] \cup [\beta;b]) : f(x) \geq 0} \text{ et } \boxed{(\forall x \in [\alpha;\beta]) : f(x) \leq 0}.$$

4. Soient f une fonction définie sur un intervalle $I = [a;b]$ de $\mathbb{R}$ et c un réel. Soient α et β deux réels tels que $f(\alpha) = 0$ et $f(\beta) = 0$. Si le tableau de variation de f est de la forme ci-dessous :

x	a		α		c		β		b
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	$\nearrow$		0	$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$	0	$\searrow$	

On a f est croissante sur l'intervalle $[a;c]$ et décroissante sur l'intervalle $[c;b]$. On traitera quatre cas :

(a) Si $x \in [a;\alpha]$, alors $x \leq \alpha$ ce qui donne $f(x) \leq f(\alpha)$. Puisque $f(\alpha) = 0$, alors

$$\boxed{(\forall x \in [a;\alpha]) : f(x) \leq 0}.$$

(b) Si $x \in [\alpha;c]$, alors $x \geq \alpha$ ce qui donne $f(x) \geq f(\alpha)$. Puisque $f(\alpha) = 0$, alors

$$\boxed{(\forall x \in [\alpha;c]) : f(x) \geq 0}.$$

(c) Si $x \in [c;\beta]$, alors $x \leq \beta$ ce qui donne $f(x) \geq f(\beta)$. Puisque $f(\beta) = 0$, alors

$$\boxed{(\forall x \in [c;\beta]) : f(x) \geq 0}.$$

(d) Si $x \in [\beta;b]$, alors $x \geq \beta$ ce qui donne $f(x) \leq f(\beta)$. Puisque $f(\beta) = 0$, alors

$$\boxed{(\forall x \in [\beta;b]) : f(x) \leq 0}.$$

D'où

$$\boxed{(\forall x \in [a;\alpha] \cup [\beta;b]) : f(x) \leq 0} \text{ et } \boxed{(\forall x \in [\alpha;\beta]) : f(x) \geq 0}.$$

Chapitre 2

Continuité Des Fonctions Numériques

Capacités attendues

✓ Etudier la continuité d'une fonction en un point en utilisant le calcul des limites ;

✓ Déterminer l'image d'un segment ou d'un intervalle par une fonction continue et par une fonction continue et strictement monotone ;

✓ Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour l'étude de quelques équations ou inéquations ou pour l'étude du signe de quelques expressions... ;

✓ Utiliser la dichotomie pour déterminer des valeurs approchées des solutions de l'équation $f(x) = \lambda$ ou pour encadrer ces solutions ;

✓ Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la fonction réciproque dans le cas d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle.

2.1 Un peu d'histoire

En mathématiques, la continuité est une propriété topologique d'une fonction. En première approche, une fonction f est continue si, à des variations infinitésimales de la variable x, correspondent des variations infinitésimales de la valeur $f(x)$.

La continuité est associée à la notion de continuum dont l'origine est géométrique. Dans un continuum géométrique, comme le plan ou l'espace, un point peut se déplacer continument pour s'approcher à une précision arbitraire d'un autre point. La notion de continuité est définie de manière rigoureuse en mathématiques.

Le premier exemple de fonctions continues concerne des fonctions réelles définies sur un intervalle et dont le graphe peut se tracer sans lever le crayon. Cette première approche donne une idée de la notion (la fonction ne saute pas) mais n'est pas suffisante pour la définir, d'autant plus que certains graphes de fonctions pourtant continues ne peuvent pas se tracer de cette manière, telles par exemple des courbes ayant des propriétés fractales comme l'escalier de Cantor.

Historiquement définie pour des fonctions de la variable réelle, la notion de continuité se généralise à des fonctions entre espaces métriques ou entre espaces topologiques, sous une forme locale et sous une forme globale.

2.2 Pour commencer

1. Calculer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to 1} x^3 - 4x + 2$	c. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3+x^2+2x-4}{x-1}$	e. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$
b. $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x^3 - 4x + 12$	d. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x^3-4x+1}{x+3}$	f. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+1} - 2x$

Régle.
Si la limite est indéterminée $[+\infty - \infty; 0 \times \pm\infty; \frac{\pm\infty}{\pm\infty}; \frac{0}{0}]$, on essaye de :
(a) Factorisation par le terme prépondéront ou bien utiliser la division euclidienne ;
(b) Multiplier par la quantité conjuguée si des racines carrées interviennent (on désigne généralement par $a - b\sqrt{c}$ la quantité conjuguée de $a + b\sqrt{c}$) ;
(c) Effectuer un changement de variable.

2. Déterminer D_f domaine de définition de la fonction f puis calculer leurs limites aux bornes de D_f où
$$f(x) = \frac{x^2+x-6}{-3x^2-7x+6}.$$

3. Déterminer D_g domaine de définition de la fonction g puis calculer leurs limites aux bornes de D_g où
$$g(x) = \sqrt{\frac{x^2+x-6}{-3x^2-7x+6}}.$$

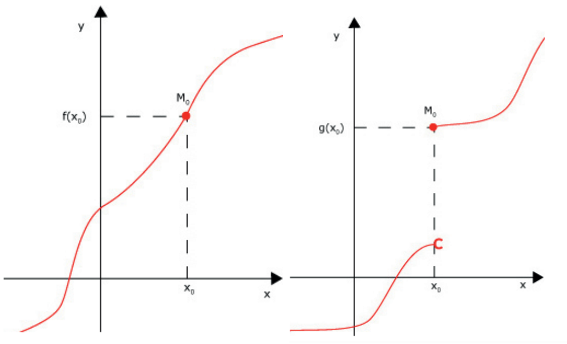
4. Déterminer D_h domaine de définition de la fonction h puis calculer leurs limites aux bornes de D_h où
$$h(x) = \frac{\sqrt{x^2+x-6}}{-3x^2-7x+6}.$$

2.3 La continuité

2.3.1 Contnuité en un point

Définition 2. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Soit a un élément de I. On dit que la fonction f est **continue en a** si et senlement si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Remarque 1. Graphiquement,la continuité d'une fonction f en a se traduit par une courbe au voisinage du point $(a, f(a))$ en un seul morceau.



La fonction f est continue en x_0 et la fonction g n'est pas continue en x_0.

Exemples 1. 1. On considère la fontion f définie par $f(x) = x^2$ et $a = 2$. On a $f(2) = 2^2 = 4$ et $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4 = f(2)$. D'où f est continue en 2.

2. On considère la fontion f définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x}{x}\ ;\ x \neq 0 \\ 1\ ;\ x = 0 \end{cases}$. On a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(x+2)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x + 2 = 2 \neq f(0)$. D'où f n'est pas continue en 0.

Exercice d'application 1. Etudier la continuité de f en a dans les cas suivants :

(1). $f(x) = x^2 + 2x - 1$ et $a = -1$. (2). $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}\ ;\ x \neq 2 \\ \frac{-2}{3}\ ;\ x = 2 \end{cases}$ et $a = 2$.

2.3.2 Contnuité à gauche- continuité à droite

Définition 3. 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle sous forme $I = [a; a + \alpha[$ où $\alpha > 0$. On dit que la fonction f est **continue à droite en a** si et senlement si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

2. Soit f une fonction définie sur un intervalle sous forme $I =]a - \alpha; a]$ où $\alpha > 0$. On dit que la fonction f est **continue à gauche en a** si et senlement si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Exemples 2. 1. On considère la fontion f définie sur $[1; 6]$ par $f(x) = \begin{cases} x + 3\ ;\ x \in]1; 6] \\ 4\ ;\ x = 1 \end{cases}$.
On a $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x + 3 = 4 = f(1)$. D'où f est continue à droite en 1.

2. On considère la fontion f définie sur $]-\infty; 0]$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1\ ;\ x \in]-\infty; 0[\\ 1\ ;\ x = 0 \end{cases}$. On a $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 + 1 = 1 = f(0)$. D'où f est continue à gauche en 0.

Proposition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$. La fonction f est en a si et senlement s'elle est continue à droite et à gauche en a.

Exemple 8. On considère la fontion f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 2x^2+1\ ;\ x \leq 1 \\ 3x\ ;\ x < 1 \end{cases}$. On a $f(1) = 2\times 1^2+1 = 3$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 2x^2+1 = 3 = f(1)$. D'où f est continue à droite en 1. De plus, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 3x = 3 = f(1)$. D'où f est continue à gauche en 1. Par conséquent, f est continue en 1.

2.3.3 Contnuité sur un intervalle

Définition 4. Soit f une fonction définie sur un intervalle sous forme $I = [a; b]$ où a et b sont des réels.

1. On dit que la fonction f est **continue** sur l'intervalle $]a; b[$ si et senlement s'elle est continue en tout les points de l'intervalle $]a; b[$.
2. On dit que la fonction f est **continue** sur l'intervalle $[a; b]$ si et senlement s'elle est continue sur $]a; b[$ et continue à droite en a et continue à gauche en b.

Proposition 2. [Continuité des fonctions usuelles]

1. Les fonctions polynomes sont continues sur $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions rationnelles sont continues sur leurs domaine de définition.
3. Les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
4. La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est continue sur l'intervalle $D = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.
5. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur l'intervalle $D = [0; +\infty[$.
6. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur l'intervalle $D = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.
7. La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

2.3.4 Contnuité sur un intervalle

Théorème 1. Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et α un réel.

1. Les fonctions $f+g$, αf et $f\times g$ sont continues sur I.
2. Si $g \neq 0$ sur I, alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I.

Théorème 2 (Continuité de la composée de deux fonctions)**.** Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$. Si f est continue sur I et g est continue sur J, alors la fonction gof est continue sur I.

Exemples 3.

1. On considère les fontions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ tels que :

$$f(x) = 2\sin(x) + x^2 + 2 \text{ et } g(x) = \frac{\cos(x)}{x^2+2}.$$

On étudier la continuité de f et g sur $\mathbb{R}$. On pose $u(x) = 2\sin(x)$, $v(x) = x^2+2$ et $w(x) = \cos(x)$.

(a) La continuité de f : On a la fonction u est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction v est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynome). D'où f est continue sur $\mathbb{R}$ (Somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$).

(b) La continuité de g : On a la fonction w est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction v est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynome). De plus, $v \neq 0$ sur $\mathbb{R}$. D'où f est continue sur $\mathbb{R}$ (Quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$).

2. On considère la fontion h définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$h(x) = \cos\left(\frac{1}{x^2}+1\right).$$

On pose $f(x) = \frac{1}{x^2}+1$ et $g(x) = \cos(x)$. Donc $h = gof$. Puisque f est continue sur $]0;+\infty[$. De plus, $f\,(]0;+\infty[) =]1;+\infty[$ et la fonction g est continue sur $]1;+\infty[$. D'où h est continue sur $]0;+\infty[$ (Continuité de la composée de deux fonctions).

2.4 L'image d'un intervalle par une fonction continue - Théorème des valeurs intermédaires

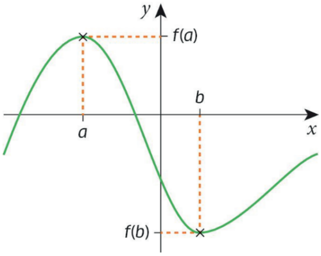
2.4.1 L'image d'un intervalle par une fonction continue

Activité.

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 \ ; \ x \leq 1 \\ x-1 \ ; \ x > 1 \end{cases}$

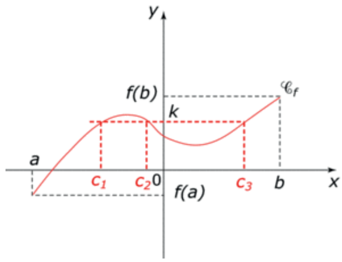
1. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Tracer la courbe représentative (C_f) de f dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.
3. Détrminer graphiquement l'image des intervalles suivants par la fonction f :
$I = [1;4]$; $J = [-3;1]$; $K = [-2;1]$; $L = [2;+\infty[$; $M =]-\infty;0]$ et $N =]-\infty;4]$.

Proposition 3. 1. L'image d'un segment $[a;b]$ par une fonction continue est un segment.
2. L'image d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle de $\mathbb{R}$.



Proposition 4. L'image d'un segment $[a;b]$ par une fonction continue est un segment $[m;M]$ où m et M sont les valeurs minimale et maximale respectives de f sur $[a;b]$.

Résultat 1. Si $f([a;b]) = [m;M]$ où f est une fonction continue sur $[a;b]$, alors pour tout k de $[m;M]$ il existe au moins un élément c de $[a;b]$ tel que $f(c) = k$.

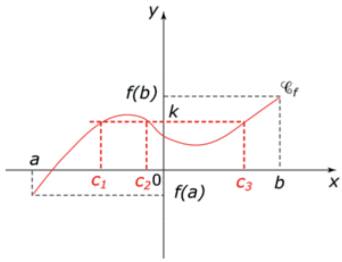


2.4.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Activité.

1. Soit f une fonction définie sur $I = [a; b]$ tels que $f(-1) = 1$ et $f(2) = 4$. Dans les cas suivants, tracer la courbe représentative de la fonction f vérifier :
   (a) L'équation $f(x) = 3$ admet trois solutions dans I.
   (b) L'équation $f(x) = 3$ n'a pas de solution dans I.
   (c) Pour tout réel k situé entre $f(-1)$ et $f(2)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans I.
2. Soit g une fonction définie sur un intervalle de $I = [a; b]$. Dans les deux cas suivants déterminer une condition suffisant sur la fonction g pour que :
   (a) pour tout réel k situé entre $g(a)$ et $g(b)$, l'équation $g(x) = k$ admet au moins une solution dans I.
   (b) pour tout réel k situé entre $g(a)$ et $g(b)$, l'équation $g(x) = k$ admet une solution unique dans I.

Théorème 3 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** Soit f une fonction continue sur un segment $[a; b]$. Pour tout réel k situé entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c de $[a; b]$ tel que $f(c) = k$. Autrement dit, pour tout réel k situé entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a; b]$.



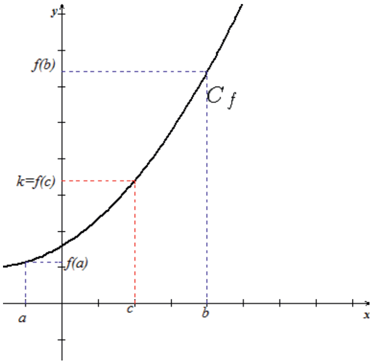
Exemple 9. Montrons que l'équation $(E) : x^3 + 2x - 1 = 0$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$. On considére la fonction f définie sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$ par : $f(x) = x^3 + 2x - 1$.

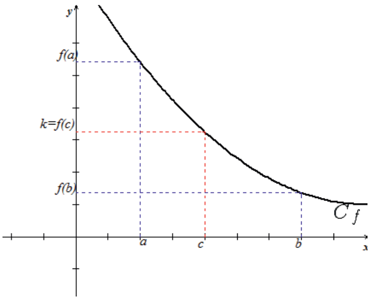
Par suite, l'équation (E) équivaut à $f(x) = 0$. La fonction f est continue sur $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$. De plus, $f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{4}\right) - 1 = \frac{-31}{64} < 0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{1}{8} > 0$. Par conséquent, $0 \in \left[\frac{-31}{64}; \frac{1}{8}\right]$. Donc d'aprés le Théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$ c-à-d. l'équation $(E) : x^3 + 2x - 1 = 0$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$.

Résultat 2. Si f une fonction continue sur un segment $[a; b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a; b]$.

Cas d'une fonction continue et strictement monotone

Sioent f une fonction continue et strictement monotone (strictement croissante ou bien strictement décroissante) sur un segment $[a; b]$.





Proposition 5. Sif une fonction continue et strictement monotone sur un segment $[a; b]$, alors pour tout réel k situé entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans $[a; b]$.

Remarque 2. On peut prolonger ce résultat dans tout intervalle de $\mathbb{R}$. Autrement dit, Sif une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors pour tout k de $f(I)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans $[a; b]$.

Exemple 10. Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 + x - 1$. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0; 2[$.

D'une part, on a f est une fonction polynome, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$. En particulier, elle continue sur $[0; 2]$. De plus, on a pour tout x de $[0; 2]$: $f'(x) = 2x + 1 > 0$, ce qui entraine que f est strictement croissante sur $[0; 2]$. D'autre part, on a $f(0) = -1 < 0$ et $f(2) = 5 > 0$, donc $f(0) \times f(2) < 0$. Par conséquent, d'aprés le Théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une une solution unique α dans $]0; 2[$.